# ATTI
DELLA
# REALE ACCADEMIA NAZIONALE
# DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.
1922

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

**VOLUME XXXI.**

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

*Seduta dell' 8 gennaio 1922.*

Presidenza del Socio anziano E. Paternò.

## MEMORIE E NOTE DI SOCI

### Paleontologia. — *Silicospongie fossili nella Liguria occidentale.* Nota II del Socio Carlo De Stefani.

#### Conclusioni e fine.

Finora in Italia, salvo qualche eccezione, gli Spongiari sono poco noti.

Nel Postpliocene d'acqua dolce è nota qualche *Spongilla* dei dintorni di Roma, vista, se non erro, dal Clerici. Nel Pliocene della stessa Liguria occidentale il Malfatti illustrò la bella fauna di Sestri Ponente cui appartengono altre specie tuttora nuove. Nel Miocene è la ricca fauna dell'Emilia studiata da Manzoni, Mazzetti e Malfatti, cui si potrebbero aggiungere la *Craticularia* raccolta da Alessandro Martelli nei dintorni di S. Vito Romano, la *Hexasterophora Lychniscosa* nuova (*Manzonia aprutina* Giattini) di San Valentino (Chieti), qualche integra inedita forma della Porretta nel Bolognese, e qualche gemmula e altro illustrati come Radiolarie nei Tripoli della Sicilia (Stöhr) e dell'Italia meridionale. Nell'Eocene superiore son noti qualche *Oxyhexaster* descritto come spicule indeterminate nei Diaspri di Pietra, le spicule di *Monactinella* convertite in calcare nell'Emilia (Pantanelli) e spicule consimili indicate dal Parona nei calcari a fucoidi di Bordighera, di Val Trebbia, Cocconato e Brozolo, M. Granaglione, Sarzanello e nel calcare ad *Helminthoida* di Ronco Scrivia. Nell'Eocene medio conosco due belli esemplari di *Rhizomorina* entro il calcare di Monte Fiesole in Val di Sieve, descritti come tutt'altra cosa dal Meneghini, ed una grossa *Hexactinella*

trovata da me e dal Ristori entro i galestri equivalenti al *Macigno* di S. Cerbone nei poggi dell'Incontro in Val d'Arno. La *Pietraforte* di Rignano e d'altri luoghi della Provincia di Firenze, da non confondere col *Macigno* di origine meccanica e con la *Pietraforte* Cretacea, riceve la Silice colloide da residui di *Hexasterophora* simili a quelli degli Schisti cristallini del Savonese.

Così il Calcare a cemento delle stesse regioni, per il quale l'origine prima della Silice da Radiolarie e Spongiari fu bene indicata dal Ristori (1901).

Nella Creta sono qualche specie di Lombardia e qualche residuo di *Hexasterophora Dictyonina* nei Diaspri del M. Bastione sul Serchio presso Pisa. Al Parona hanno presentato svariati residui di Spongiari i calcari e scisti fossiliferi del Giurese di Gozzano, del Monfenera, dei Bacini del Ceresio e del Lario, della Prealpe Bergamasca, ed io ne vidi tracce nel calcare del Lias medio di Sassorosso in Garfagnana. In Sardegna a Sud di Alghero, sul mare ed intorno alla miniera di Colabona, i calcari siliciferi del Trias medio a *Myophoria* ed *Encrinus* sono costituiti in molta parte di Spongiari come indicai nel 1891 separando però quei calcari dagli altri del Trias ed attribuendoli al Lias (1).

Nell'*Hauptdolomit* triassica del Niski Verh in Valle dell'Isonzo ed in alcune masse d'idrossido di ferro dello stesso luogo e piano geologico, entro esemplari raccolti dal mio discepolo dott. Egidio Feruglio, sono pure resti di *Hexasterophora*.

Finalmente nel Cambriano dell'Iglesiente in Sardegna Bornemann descrisse *Palaeospongiae*, oltre *Archaeocyathus* e *Coscinocyathus* che alcuni dubitano siano Hexacoralli. Questi fossili nell'America settentrionale ed in Germania si trovano nel Cambriano inferiore e ritengo che al medesimo piano appartengano quelli di Sardegna, differentemente da altri che li ritengono meno antichi.

(1) Tornquist (*Ergebnisse einer Bereisung der Insel Sardinien*, 1902), p. 821 ricopiato dal Frech (*Die mesozoische* ecc.), p. 76 dice «i calcari della Sardegna centrale (con Halobìa e *Daonella*) ritenuti triassici dal De Stefani appartengono al Giura superiore e gli strati Carboniferi sottostanti al Permiano inferiore ». Le rettificazioni erano già state fatte dal mio assistente L. Pampaloni nel 1900. Le *Halobìa* etc., non furono da me citate dalla Sardegna centrale ma dai terreni veramente triassici a Sud di Alghero.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Le classi di forme aritmetiche di Dirichlet appartenenti ai generi della specie principale.* Nota II del dottor ALBERTO MARIO BEDARIDA, presentata dal Corrisp. GUIDO FUBINI.

3. — Sia H una classe di forme di Dirichlet a determinante D; le forme, i cui coefficienti sono coniugati dei coefficienti delle forme di H, costituiscono una classe di forme, a determinante D, che diremo *classe coniugata* alla forma H e s'indicherà con $H_0$.

Abbiamo ora il lemma I): *componendo una classe* H *con la sua coniugata* $H_0$ *si ottiene una classe razionale.*

La questione è ovvia se H è razionale. Sia dunque H complessa e determiniamo in H ed in $H_0$ due forme coniugate e *concordanti* [1]. Consideriamo una forma $(a, b, c)$ di H, la forma $(a_0, b_0, c_0)$ apparterrà ad $H_0$ e non siano concordanti, cioè i numeri $a$, $a_0$ e $b + b_0$ non siano primi tra di loro. Si può ritenere $a$ primo con 2D e quindi con $2b = 2b_1 + 2ib_2$: gli interi razionali $a_1$, $a_2$, $2b$ e $2b_2$ ove $a_1$ ed $a_2$ sono la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di $a$, saranno primi tra di loro. Ciò posto, applichiamo alla forma $(a, b, c)$ la sostituzione aritmetica $\begin{pmatrix} 1 \,.\, 0 \\ x \,.\, 1 \end{pmatrix}$, ove $x$ è un intero razionale: si otterrà $(a'_1, b'_1, c)$; applicandola alla $(a_0, b_0, c_0)$ si avrà la forma $(a'_0, b'_0, c)$. Si tratta di vedere che si può scegliere $x$ in modo che i coefficienti $a'$, $a'_0$ e $b' + b'_0$ siano primi tra di loro, cioè che lo siano $a'_1$, $a'_2$ e $2b'_1$, essendo $a'_1$ ed $a'_2$ rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di $a'$ e $b'_1$ la parte reale di $b'$.

Per le relazioni che sussistono tra i coefficienti di due forme equivalenti, si può scrivere:

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 + 2b_1x + c_1x^2 \\ a'_2 &= a_2 + 2b_2x + c_2x^2 \\ 2b'_1 &= 2b_1 + 2c_1x , \end{aligned}$$

ove $c_1$ e $c_2$ sono rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di $c$. Ora, manifestamente, $a'_1$. $a'_2$ e $2b'_1$ saranno primi tra di loro se tali sono i tre numeri: $a_1 = a_1 - 2b'_1x$, $2b_1 + 2c_1x$, $a_2 + 2b_2x + c_2x^2$.

(1) Cfr. Dirichlet-Dedekind: *Teoria dei numeri*, traduzione di A. Faifofer, pag. 379; oppure Bianchi, op. cit.

A quest'ultima condizione si può soddisfare disponendo opportunamente di $x$. Infatti, basterà provare che, preso un fattore primo $u_i$ di $a_1$, si può scegliere un valore $\alpha_i$ di $x$, per modo che si abbia una delle incongruenze:

$$2b_1 + 2c_1\alpha_i \not\equiv 0 \pmod{u_i}$$
$$a_2 + 2b_2\alpha_i + c_2\alpha_i^2 \not\equiv 0 \pmod{u_i}.$$

Ciò è sempre possibile: perchè, nel caso opposto, $u_i$ dovrebbe dividere $2b_1$, $2b_2$, $a_2$, ed $a_1$ contro l'ipotesi. Procedendo nel medesimo modo per tutti i fattori primi diversi di $a_1$, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ e prendendo poi:

$$x \equiv \alpha_1 \pmod{u_1},\ x \equiv \alpha_2 \pmod{u_2}, \ldots, x \equiv \alpha_m \pmod{u_m},$$

sarà raggiunto lo scopo.

Se dunque $(a, b, c)$ ed $(a_0, b_0, c_0)$ sono due forme rispettivamente di H e di $H_0$, coniugate e concordanti, si potrà considerare un intero razionale B, che soddisfi alle congruenze:

$$B \equiv b \pmod{a},\ B \equiv b_0 \pmod{a_0},\ B^2 \equiv D \pmod{aa_0}$$

e quindi, ponendo $C = \dfrac{B^2 - D}{a\,a_0}$, C è intero razionale, e la classe composta $H \cdot H_0$, contenendo la forma $(aa_0, B, C)$ è razionale, c. v. d.

Della classe H consideriamo ora l'opposta della coniugata, $H_0^{-1}$: procedendo in modo analogo a quello seguito nel lemma precedente, si prova l'esistenza di due forme $(a, b, c)$ ed $(a_0, -b_0, c_0)$, appartenenti ad H ed $H_0^{-1}$ rispettivamente e concordanti. Si ha allora il lemma II): *componendo una classe* H, *con l'opposta della coniugata* $H_0^{-1}$, *si ottiene una classe del tipo* P [1].

4. — Le considerazioni del numero precedente ci permettono ora di dimostrare che non esistono altre categorie, oltre quelle notate al n. 2, di classi di forme di Dirichlet, a determinante D, appartenenti ai generi delle specie principale.

Sia K una classe di forme di Dirichlet, appartenente ai generi suddetti, ed indichiamo con $f$ una sua forma.

Se $D \equiv 3 \pmod{4}$ oppure $D \equiv 0 \pmod{2}$, esiste certamente una forma di Gauss $f_1$, a determinante D, primitiva di prima specie, la quale

[1] Questo lemma e il suo precedente risultano pure, come è ben naturale, ricorrendo alle formule generali di composizione delle forme date da Gauss nelle sue *Disquisitiones*. Noi però abbiamo preferito seguire il metodo di composizione delle forme dato da Dirichlet, e cioè ricorrendo alla nozione di forme concordanti, perchè appunto sotto questa forma più elegante viene comunemente esposta la teoria della composizione delle forme aritmetiche.

abbia gli $n$ caratteri (¹) relativi agli $n$ fattori primi razionali, dispari, diversi, soddisfacenti alle condizioni:

$$(3)\qquad \left(\frac{f_1}{p_1}\right)=+1,\left(\frac{f_1}{p_2}\right)=+1,\dots,\left(\frac{f}{p_r}\right)=+1,$$
$$\left(\frac{f_1}{q_1}\right)=\left[\frac{f}{\pi_1}\right]=\left[\frac{f}{\pi_{1_0}}\right],\left(\frac{f_1}{q_2}\right)=\left[\frac{f}{\pi_2}\right]=\left[\frac{f}{\pi_{2_0}}\right],\dots$$
$$\left(\frac{f}{q_s}\right)=\left[\frac{f}{\pi_s}\right]=\left[\frac{f}{\pi_{s_0}}\right],$$

perchè i caratteri delle forme di Gauss sono, nel caso attuale, $n+1$ oppure $n+2$ e possiamo quindi disporre di almeno uno oltre i caratteri $\left(\frac{f_1}{p_i}\right)$ e $\left(\frac{f_1}{q_j}\right)$ per rendere soddisfatta la nota relazione fra i caratteri. La forma $f_1$, considerata nel corpo $K(\sqrt{-1})$, ha anche i caratteri $\alpha, \beta$ e $\gamma$ (od alcuni di essi) aventi per valori $+1$. Consideriamo la classe $R_1$ di forme di Dirichlet a cui $f_1$ appartiene; $R_1$ sarà razionale. La classe $K.R_1$ appartiene al genere principale; perchè dalle (2) e (3), si ha subito:

$$\left[\frac{ff_1}{p_1}\right]=+1,\left[\frac{ff_1}{p_2}\right]=+1,\dots,\left[\frac{ff_1}{p_r}\right]=+1,$$
$$\left[\frac{ff_1}{\pi_1}\right]=+1,\left[\frac{ff_1}{\pi_2}\right]=+1,\dots,\left[\frac{ff_1}{\pi_s}\right]=+1,\left[\frac{ff_1}{\pi_{1_0}}\right]=+1,$$
$$\left[\frac{ff_1}{\pi_{2_0}}\right]=+1,\dots,\left[\frac{ff_1}{\pi_{s_0}}\right]=+1,\alpha=+1,\beta=+1,\gamma=+1$$

ove, circa i caratteri $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ si deve ripetere la solita osservazione. La classe $KR_1$ è quindi una classe duplicata, e si potrà scrivere:

$$KR_1 = H^2 = HH_0 H_0^{-1} H\,;$$

ma, per il lemma del numero precedente, $HH_0$ è una classe $R_2$, razionale, $H_0^{-1}H$ è una classe $P_1$, del tipo P e perciò si ha:

$$KR_1 = R_2P_1$$

onde $K = R_2R_1^{-1}P_1$. Ora, essendo $R_2R_1^{-1}$ una classe razionale, si ha che K risulta dalla composizione di una classe razionale con una classe del tipo P: non potrà dunque essere che razionale, complessa del tipo P, oppure composta di due tali tipi, secondochè sia, rispettivamente: $P_1$ razionale, $R_2R_1^{-1}$ del tipo P e $P_1$ complessa, oppure $R_2R_1^{-1}$ non del tipo P e $P_1$ complessa.

Sia $D\equiv 1 \pmod{4}$, allora è $-D\equiv 3 \pmod{4}$. Tra le forme di Gauss a determinante $-D$, primitive di prima specie, esisterà una forma $f'\equiv(a, b, c)$ per la quale si abbiano le relazioni (3), perchè tra i caratteri delle forme di Gauss, a determinante $-D\equiv 3 \pmod{4}$ vi è uno in

(¹) Cfr. La teoria dei generi delle forme di Gauss; ad es. in Bachmann: *Die Arithmetik der quadratischen Formen*, pag. 108 e seg.

più oltre i caratteri $\left(\frac{f'}{p_i}\right)$ e $\left(\frac{f'}{q_j}\right)$ per cui è ancora possibile soddisfare alla relazione tra i caratteri. Ora, la forma $f \equiv (a, ib, -c)$, a determinante D, apparterrà, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, ad una classe di forme di Dirichlet $P_1$, del tipo P e sarà tale, che, la classe $KP_1$ appartenga al genere principale. Segue dunque la stessa conclusione dei casi precedenti.

Le considerazioni svolte in questo numero, e quelle del numero 2, ci conducono al risultato seguente, oggetto dell'attuale studio:

*Le classi di forme aritmetiche di Dirichlet, del corpo* $K(\sqrt{-1})$, *a determinante* D (*intero razionale*), *primitive di prima specie, appartenenti ai generi della specie principale* (2), *sono di tre sole categorie: le classi razionali, le classi complesse del tipo* P *e le classi* (*complesse*) *che si ottengono componendo una classe razionale, non del tipo* P, *con una classe complessa del tipo* P.

A questo risultato aggiungiamo ancora l'osservazione: *le classi appartenenti ai generi delle specie principale formano un sotto-gruppo del gruppo di composizione delle classi di forme di Dirichlet, che contiene a sua volta, come sotto-gruppo, quello delle classi appartenenti al genere principale.*

Si noti che se il determinante D contiene fattori primi, razionali, dispari, che siano soltanto $\equiv 3 \pmod{4}$, questi due sotto-gruppi coincidono, ed inversamente.

## Matematica. — *Sulle varietà in rappresentazione conforme con la varietà euclidea a più di tre dimensioni.* Nota di Aldo Finzi, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Di recente ho trattato il problema della rappresentabilità conforme di una varietà qualunque ad $n$ dimensioni sulla euclidea con altrettante dimensioni [1], e sono pervenuto a due serie di condizioni: la prima costituita di equazioni algebriche lineari nei simboli di Riemann, la seconda di equazioni differenziali di 1° ordine nei simboli stessi. Tali gruppi di equazioni, che qui riporto, senz'altro, dalla mia Nota, sono i seguenti:

$$\text{(A)}\qquad a_{ij,hk} + \frac{1}{n-2}\left(a_{ih}\,G_{jk} - a_{ik}\,G_{jh} + a_{jk}\,G_{ih} - a_{jh}\,G_{ik}\right) + \\ + \frac{G}{(n-1)(n-2)}\left(a_{ik}\,a_{jh} - a_{ih}\,a_{jk}\right) = 0\,,$$

$$\text{(B)}\qquad a_{ik}\,G_l - a_{il}\,G_k - 2(n-1)\left(G_{ik/l} - G_{il/k}\right) = 0\,.$$

[1] A. Finzi, *Sulla rappresentabilità conforme di due varietà ad n dimensioni l'una sull'altra.* Atti del R. Ist. Veneto, tomo LXXX, parte 2ª, 1921.

in cui è

$$G_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_{jh}\, a^{(jh)}\, a_{ij,hk} \quad , \quad G = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a^{(ik)}\, G_{ik} .$$

Per $n = 3$ le (A) si riducono ad identità.

Contemporaneamente a me, e con metodi proprî, lo Schouten ha trattato lo stesso problema (¹), ed è giunto, naturalmente, a due sistemi di equazioni equivalenti ad (A) e (B), espressi con gli speciali simboli di cui l'autore da alcun tempo si vale. Lo Schouten ha fatto, però, un'ulteriore e feconda osservazione, che a me era sfuggita. Si tratta precisamente di questo. Nella mia Nota io ho asserito (omettendone la facilissima dimostrazione) che le relazioni del Bianchi per i simboli di Riemann sono identicamente soddisfatte, quando sono verificate le (A) e le (B). Lo Schouten, invece, ha dimostrato che, per $n > 3$, dalle relazioni del Bianchi e dal gruppo delle condizioni algebriche si può ottenere il gruppo delle condizioni differenziali, le quali diventano quindi superflue per la rappresentabilità conforme di una $V_n$ $(n > 3)$ sopra lo spazio piano. Tale risultato può trarsi molto rapidamente anche dalle mie equazioni (A), associandovi le identità del Bianchi e l alcune loro combinazioni già costruite dal Levi Civita (²).

Ciò mi propongo di mostrare in questa Nota (³), in cui aggiungo alcuna delle applicazioni consentite allo Schouten dalla osservazione sopra esposta, ritenendone non inutile la trattazione con i metodi del Calcolo differenziale assoluto, dato che lo speciale simbolismo usato da quell'autore richiede una iniziazione tutta propria.

2. Con le posizioni

$$\mathcal{A}_{rs} = a_{rs}\, G - 2\,(n-1)\, G_{rs} , \tag{1}$$

$$A_{rst} = \mathcal{A}_{rst} - \mathcal{A}_{rts} , \tag{2}$$

già da me introdotte nel citato lavoro, le (A) e (B) prendono la forma

$$2\,(n-1)\,(n-2)\, a_{ij,hk} + (a_{ik}\, \mathcal{A}_{jh} - a_{ih}\, \mathcal{A}_{jk} + a_{jh}\, \mathcal{A}_{ik} - a_{jk}\, \mathcal{A}_{ih}) = 0 , \tag{$A_1$}$$

$$A_{rst} = 0 . \tag{$B_1$}$$

Derivando le $(A_1)$ e tenendo conto delle relazioni del Bianchi

$$a_{ij,hkl} + a_{ij,klh} + a_{ij,lhk} = 0 ,$$

(¹) J. A Schouten, *Ueber die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung.* Mathem. Zeitschrift, Band 11, Heft 1/2, 1921, pp. 58-88.

(²) T. Levi-Civita, *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale.* Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXVII, serie 5ª, 1° sem. 1917, pag. 381, formole (12).

(³) Il risultato dello Schouten fu ottenuto poi, per altra via, anche dal Weyl in *Einordnung der projekt. und der Konf. Auffassung.* Nach. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1921, s. 9.

dalle $(A_1)$ si passa alle

$$a_{ih}\,A_{jkl} + a_{ik}\,A_{jlh} + a_{il}\,A_{jhk} = a_{jh}\,A_{ikl} + a_{jk}\,A_{ilh} + a_{jl}\,A_{ihk}\,,$$

e da queste, moltiplicando per $a^{(ih)}$ e sommando rispetto ad $i, h$, si deducono le

$$(n-3)\,A_{jkl} = a_{jk} \sum_{1}^{n}{}_{ih}\, a^{(ih)}\,A_{ilh} + a_{jl} \sum_{1}^{n}{}_{ih}\, a^{(ih)}\,A_{ihk}\,.$$

Se si tiene conto delle posizioni (1) e (2), e delle identità del Levi-Civita

$$2 \sum_{1}^{n}{}_{ih}\, a^{(ih)}\,G_{lih} = G_l\,,$$

dianzi citate, si riconosce facilmente che le due sommatorie del 2° membro delle equazioni precedenti sono identicamente nulle; per cui da esse si trae

$$(n-3)\,A_{jkl} = 0\,,$$

e per $n > 3$ si hanno, quindi, le $(B_1)$.

3. Quando $n > 3$, le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè una varietà $V_n$ sia rappresentabile conformemente sulla varietà euclidea, sono dunque date dalle sole equazioni (A), che nel precedente lavoro ho messo sotto la seguente forma intrinseca:

$$(A') \qquad \gamma_{pq,rt} = 0\,,$$

$$(A'') \qquad \gamma_{pq,pt} = \sum_{1}^{n}{}_{r}\, \gamma_{rq,rt}\,,$$

$$(A''') \qquad \gamma_{pq,pq} = \frac{1}{n-2} \sum_{1}^{n}{}_{r} (\gamma_{rp,rp} + \gamma_{rq,rq}) - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \gamma_{rs,rs}\,,$$

(indici tutti distinti), con riferimento ad una qualunque ennupla di congruenze ortogonali della varietà data.

Se, in particolare, ci si riferisce ad una ennupla principale [1], dovendo per essa aversi

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \gamma_{rq,rt} = 0 \quad (q \neq t) \quad , \quad \sum_{1}^{n}{}_{r}\, \gamma_{rp,rp} = \varrho_p\,,$$

in cui $\varrho_p$ sono gli invarianti principali, le precedenti assumono l'aspetto più semplice

$$\gamma_{pq,rt} = 0 \;\;,\;\; \gamma_{pq,pt} = 0 \;\;,\;\; (n-1)(n-2)\,\gamma_{pq,pq} = (n-1)(\varrho_p + \varrho_q) - \sum_{1}^{n}{}_{r}\, \varrho_r\,.$$

[1] G. Ricci, *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*. Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIII, parte 2ª, 1903-04, pp. 1233-1239, cfr. pag. 1236.

4. Si voglia ora trovare per quali varietà $V_n$ $(n > 3)$, immerse nello spazio piano ad $n+1$ dimensioni (ipersuperficie), le condizioni (A′), (A″), (A‴) siano verificate.

Basterà ricordare che ogni ennupla che risulti delle linee di curvatura di una ipersuperficie ad $n$ dimensioni, è per essa una ennupla principale, e che fra le ennuple principali ne esiste una almeno per cui sono soddisfatte le equazioni

$$\gamma_{pq,rt} = 0\,, \tag{3}$$

ogni volta che la combinazione semplice $(rt)$ degli indici $1, 2, \ldots, n$, è distinta dalla $(pq)$, e alle equazioni

$$\gamma_{pq,pq} = \beta_p \beta_q\,, \tag{4}$$

in cui $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sono indeterminate [1].

Le (A′) ed (A″) sono senz'altro soddisfatte, se lo sono le (3); le (A‴), in virtù delle (4), diventano

$$\begin{gathered}(n-1)(n-2)\beta_p\beta_q - \\ -(n-1)\left\{\beta_p(\mathrm{B}-\beta_p)+\beta_q(\mathrm{B}-\beta_q)\right\} = \sum_1^n{}_r\, \beta_r^2 - \mathrm{B}^2\,,\end{gathered} \tag{5}$$

ove $\mathrm{B} = \sum_1^n{}_r\, \beta_r^2$. Le (5) si mutano in identità, non solo se si suppongono tutte uguali le $\beta_r$, ma anche se si suppongono uguali $n-1$ di esse.

Ponendo nelle (5), in luogo della combinazione $(p, q)$, successivamente, le combinazioni $(i, j), (i, k)$ e sottraendo, indi $(j, l)$ e $(k, l)$ e sottraendo, si ricavano le equazioni

$$(\beta_j - \beta_k)\left\{(n-2)\beta_i + \beta_j + \beta_k - \mathrm{B}\right\} = 0\,,$$

$$(\beta_j - \beta_k)\left\{(n-2)\beta_l + \beta_j + \beta_k - \mathrm{B}\right\} = 0\,,$$

da cui si passa alle

$$(\beta_i - \beta_k)(\beta_i - \beta_l) = 0.$$

Queste, e l'osservazione fatta sopra, esprimono il teorema: *Fra le ipersuperficie ad $n$ dimensioni $(n > 3)$ sono rappresentabili conformemente sulla varietà euclidea ad $n$ dimensioni tutte e soltanto quelle per le quali $n-1$ almeno delle $\beta_i$ sono uguali* [2].

5. Dal Ricci fu dimostrata questa notevole proposizione [3]: *Ammettono terne ortogonali costituite di congruenze normali e isotrope tutte e sole*

(1) G. Ricci, loc. cit., pag. 1233.

(2) J. A. Schouten, loc. cit., pp. 87-88. Il caso $n = 3$ fu trattato da me nella Nota: *Le ipersup. a tre dimensioni che si possono rappresentare conform. sullo spazio euclideo.* Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXII, parte 2ª, 1903.

(3) G. Ricci, *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori.* Rend. R. Accad. Lincei, vol. XIX, serie 5ª, 1° sem. 1910, pp. 181-187.

*le varietà a tre dimensioni che si possono rappresentare conformemente sullo spazio euclideo.*

Il teorema si estende facilmente alle varietà con un numero qualunque di dimensioni maggiore di tre [1]. Se si suppone infatti che la $V_n$ ammetta una ennupla ortogonale (che potrà assumersi come ennupla di riferimento) costituita di congruenze normali ed isotrope, per essa saranno soddisfatte le condizioni seguenti:

$$\gamma_{hij} = 0 \quad , \quad \gamma_{hii} = \gamma_{hjj} ,$$

per ogni terna di indici $h, i, j$ distinti.

In tale ipotesi, per gli invarianti $\gamma$ a 4 indici, varranno le relazioni

$$\gamma_{hi,kj} = 0 \quad , \quad \gamma_{hi,hj} = \gamma_{ki,kj} ,$$
$$\gamma_{hi,hi} + \gamma_{kj,kj} = \gamma_{hk,hk} + \gamma_{ij,ij} ,$$

in cui $h, i, k, j$ sono da intendere variabili da 1 ad $n$, ma tutti distinti. Le relazioni del 1° gruppo coincidono con le (A'); da quelle del 2° (dando a $k$ tutti i valori da 1 ad $n$, diversi da $i$ e $j$, e sommando) si ottengono le (A''); e infine da quelle del 3° gruppo (dando a $j$ tutti i valori da 1 ad $n$, diversi da $i$ e $k$, e sommando, indi a $k$ tutti i valori da 1 ad $n$, eccetto $h$, e sommando) si hanno le (A''').

Risulta pertanto che ogni $V_n$, nella quale esiste una ennupla ortogonale di congruenze normali e isotrope, è in rappresentazione conforme con la varietà euclidea; la proposizione reciproca non ha bisogno di dimostrazione, e però il teorema di Ricci risulta generalizzato, come si voleva.

## Matematica. — *Sulla equazione funzionale $f(x+y)=f(x)\,f(y)$.* Nota I di Silvio Minetti, presentata dal Socio T. Levi-Civita [2].

I. Introduzione. — È noto [3] che se una $f(x)$, funzione della $x$ nel senso di Dirichlet, soggiace alle seguenti ipotesi:

1) è definita in tutto il campo reale;

2) in un intervallo prefissato, $a \leq x \leq b$, si mantiene reale ed inferiore in valore assoluto ad un numero positivo M;

3) in tutto il campo reale soddisfa all'equazione funzionale

$$f(x+y) = f(x)\,f(y) , \tag{1}$$

ovvero all'altra

$$f(x+y) = f(x) + f(y) . \tag{1'}$$

[1] Di questa generalizzazione lo Schouten fa cenno nella nota 33 a piè di pag. 88 del citato suo lavoro.

[2] Presentata nella seduta del 19 giugno 1921.

[3] Darboux, Math. Annal., Bd XVII, 1880, pag. 55.

essa risulta necessariamente continua e quindi (Cauchy) coincide rispettivamente con la funzione $e^{kx}$ o $Kx$ (K costante).

È noto altresì come la questione di trovare il minimo di condizioni da imporre alla $f(x)$ perchè risulti necessariamente continua, ha dato origine a varii lavori, e come forse il risultato più importante in merito sia quello ottenuto dal Darboux [1].

In esso però, come in tutti gli altri lavori sull'argomento, si ammette l'ipotesi 1).

Ci proponiamo di mostrare qui che [escluso il caso banale in cui la $f(x)$ sia zero dappertutto, tranne in un punto] alla 1) si può sostituire l'ipotesi più lata che la $f(x)$ sia definita soltanto nell'intervallo $(a, b)$.

Con ciò, notiamo bene, in forza della (1), o rispettivamente, della (1′), essa viene subordinatamente determinata anche nell'intervallo $(2a, 2b)$, che in generale risulterà staccato dal primo [2].

Senza ledere la generalità, potremo supporre $a$ e $b$ ambedue positivi poichè, in caso contrario, si perverrebbe alla conclusione enunciata ancor più direttamente, come sarà facile riconoscere dal seguito della presente Nota.

Qui tratteremo il caso della (1), ma è ovvio far notare che la conclusione accennata vale anche per il caso in cui la $f(x)$ soddisfi, anzichè alla (1), alla (1′).

Lo stesso teorema vale per una $f(z)$, funzione della variabile complessa $z$, sempre beninteso nel senso di Dirichlet; esso si riconduce in modo semplicissimo al caso del campo reale che stiamo per trattare, e sarà oggetto di una brevissima comunicazione che avrò l'onore di presentare a codesta Accademia [3].

(1) Loc. cit. Sull'argomento, che si riconnette intimamente al postulato della continuità della risultante di due vettori, ed alla ben ordinabilità del continuo (post. di Zermelo), vedi: Volpi, Giorn. di Batt., v. XXXV, 1897, pag. 104, a cui però sono state sollevate varie obiezioni; Levi Beppo, Rend. R. Acc. Lincei, ser. V, tom. IX, 2° sem. 1900; Hamel, Math. Ann., Bd. LX, 1905, pag. 459; vedi pure uno studio del prof. Roncagli brevemente riassunto nei Rend. del Semin. Matem. della R. Univ. di Roma, 1913-14, in cui afferma illusoria e scorretta la soluzione discontinua proposta dall'Hamel.

Dal punto di vista della comp. dei vettori vedi l'estesa bibl. nella *Meccanica razionale del Marcolongo*, man. Hoepli, II ediz., vol. I, 1917.

(2) Per la validità della conclusione cui si giunge, basta del resto supporre la $f(x)$ definita in un intervallo $(a, b)$, in esso limitata, e godente della proprietà che il prodotto $f(x_1)\,f(x_2)$ o rispettivamente la somma $f(x_1)+f(x_2)$ (se $x_1$ ed $x_2$ sono due punti compresi nell'intervallo di definizione) resti costante quando, pur variando $x_1$ ed $x_2$, non varii però la loro somma $(x_1+x_2)$.

(3) In proposito vedi: Segre, Atti Acc. Scienze Torino, tom. 25 e 26, an. 1890 e 1891; Segre, Math. Ann., Bd 40, an. 1890-91; Segre, Interm. des Mathem., tom. I, pag. 182, an. 1894; Lebesgue, Atti Acc. Scienze Torino, tom. XLII, 1906-07, pag. 532; E. Noether, Math. Ann., Bd LXXII, 1916; Terracini, Math. Ann. Bd. 80, an. 1921.

II. Legittimità dell'ipotesi $f(a) \neq 0$. — Osserviamo innanzi tutto come sia lecito supporre $f(a) \neq 0$.

Invero, se fosse $f(a) = 0$, dall'eguaglianza

$$f(a)\, f(x) = f(a + x)$$

che vale per $a \leq x \leq b$, si trarrebbe che la $f(x)$ sarebbe sempre nulla. intanto, da $2a$ ad $(a + b)$.

In causa poi dell'altra eguaglianza

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

intesa applicata per $2a \leq x \leq (a + b)$, si trarrebbe che la $f(x)$ è conseguentemente nulla pure da $a$ ad $\frac{a+b}{2}$, cioè in tutta la prima metà dell'intervallo $(a, b)$.

Se dunque la $f(x)$ è nulla nell'estremo inferiore, $a$, dell'intervallo, è nulla pure necessariamente in tutti i punti della prima metà di esso (estremo superiore compreso).

Ragionando poi sulla seconda metà di $(a, b)$, come abbiam fatto per la prima, e così di seguito, scorgiamo facilmente come l'ipotesi $f(a) = 0$ tragga la conseguenza $f(x) = 0$ per $a \leq x < b$, cadendo nel caso banale.

III. Riduzione a zero dell'estremo inferiore dell'intervallo di definizione. — Si consideri una nuova funzione definita nell'intervallo chiuso $[0, (b - a)]$ (di cui cioè fan parte anche l'estremo inferiore 0 e l'estremo superiore $[b - a]$) dalla posizione

$$\varphi(x) = \frac{f(x + a)}{f(a)}, \tag{2}$$

posizione legittima, in quanto, come abbiam visto, $f(a) \neq 0$.

La $\varphi(x)$ nell'intervallo $[0 . (b - a)]$ soddisferà alle ipotesi cui soggiace la $f(x)$; in particolare soddisferà in quel campo alla (1).

Invero, se $x_1$ ed $x_2$ sono due punti tali che

$$0 \leq x_1 \leq (b - a)\ , \ 0 \leq x_2 \leq (b - a)\ , \ 0 \leq (x_1 + x_2) \leq (b - a),$$

sarà

$$\varphi(x_1)\, \varphi(x_2) = \frac{f(x_1 + a)}{f(a)} \frac{f(x_2 + a)}{f(a)} = \frac{f(x_1 + x_2 + a + a)}{f(a)\, f(a)} =$$

$$= \frac{f(x_1 + x_2 + a)}{f(a)} = \varphi(x_1 + x_2).$$

Inoltre $\varphi(0) = 1$, e poi dalla relazione $\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)^2$ risulterà essere $\varphi$ sempre positiva.

Essa inoltre, a meno di essere sempre nulla da 0 a $(b - a)$ (0 escluso), non può mai annullarsi.

Invero, se fosse $\varphi(x')=0$, potendosi scrivere, per ogni $x''>x'$ e compreso fra $0$ e $(b-a)$,

$$\varphi(x'')=\varphi(x')\,\varphi(x''-x'),$$

dovrebbe essere $\varphi(x'')=0$, e quindi, se la $\varphi(x)$ s'annulla in un punto, essa si annulla pure per tutti i punti compresi fra quello e l'estremo superiore dell'intervallo.

In forza poi dell'eguaglianza $\varphi(x')=\varphi\left(\frac{x'}{2}\right)^2$, seguirebbe $\varphi\left(\frac{x'}{2}\right)=0$ e quindi la funzione si annullerebbe anche in tutti i punti dell'intervallo $\left(\frac{x'}{2}, x'\right)$.

Così ragionando, si arriva a concludere che la $\varphi(x)$, tranne per $x=0$, sarebbe sempre nulla. In conseguenza di ciò, si annullerebbe anche $f(x)$ per $a < x - b$, ricadendo nel caso banale.

Nel seguito della presente Nota mostreremo dapprima che la continuità in un punto generico dell'intervallo può ricondursi alla continuità a destra del punto zero.

Successivamente dimostreremo che la nostra $f(x)$ è necessariamente continua alla destra dell'origine, rimanendo così affermato il nostro assunto.

La presente Nota ha avuto occasione di esser redatta da uno studio sul problema generale della propagazione elettrica lungo le linee col metodo simbolico di Heaviside.

## Matematica. — *Sopra un tipo di equazioni integrali non lineari.* Nota I di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Il seguente tipo di equazioni integrali non lineari

$$(1)\qquad u(x)=h(x)+\lambda\sum_{r=1}^{p}\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)}\mathrm{K}^{(r)}\,[x,y;h(y)]\,dy\,,$$

nel caso che sia $p=1$, $\mu_r(x)=0$, $g_r(x)=x$, il nucleo sia regolare e soddisfi a certe condizioni, venne risoluto dal Volterra [1].

[1] *Leçons sur les équations intégrales* ecc., Gauthier Villars, Paris, 1913, pag. 90. L'equazione lineare del Volterra, col limite superiore generalizzato, venne considerata più tardi dall'Andreoli nella sua Memoria *Sulle equazioni integrali*, inserita nel vol. XXXVII dei Rend. del Circ. mat. di Palermo, pp. 76-112. Ivi l'A. dimostra che, se la funzione incognita è assoggettata soltanto ad operazioni di un certo gruppo, l'equazione data può ricondursi, mediante una trasformazione, ad un'equazione di Fredholm di 1ª specie, nella quale la funzione incognita figuri soggetta a sole operazioni elementari. Altri tipi di equazioni non lineari vennero studiati dal Bratu e dal Lévy P. in parecchie Note apparse nei *Comptes Rendus* negli anni 1909-'10-'11.

Qui noi ci proponiamo di studiare la (1) che appartiene ad un tipo alquanto più generale di quello ora menzionato, supponendo che parte delle $K^{(r)}[x, y; h(y)]$, od anche tutte, possano diventare infinite per valori di $y$ nei rispettivi intervalli d'integrazione $[\mu_r(x), g_r(x)]$, con $a \leq x \leq b$, senza che perciò ne resti infirmata la loro integrabilità.

2. Per risolvere la (1), opereremo anzitutto una trasformazione [1] aggiungendo ai due membri della stessa la funzione

$$u(x) = \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \{ c_r u(y) + c \} \, dy ,$$

dove le $c_r$ e la $c$ sono delle costanti da determinarsi. Posto

$$U(x) = u(x) + u'(x); \qquad K^{(r)}[x, y; h(y)] + c_r u(y) + c = H^{(r)}[x, y; h(y)],$$

la (1) diventa

$$U(x) = h(x) + \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} H^{(r)}[x, y; h(y)] \, dy .$$

Faremo l'ipotesi che la $u(x)$ sia limitata e che le $K^{(r)}[x, y; h(y)]$ $(r = 1, 2, \ldots, p)$ ammettano, pei valori di $y$ pei quali sono regolari, la derivata prima determinata, rispetto alla funzione $h(y)$ considerata come una variabile; derivata che indicheremo con $K'^{(r)}_{h(y)}[x, y; h(y)]$ [2].

Scelti allora un $\sigma > 0$ arbitrario ed un numero positivo $m$ tale che $|\lambda| mp = \varrho$ risulti positivo e minore di un numero arbitrario $k < 1$, determiniamo le costanti $c_r$ in modo che, per ogni funzione $0 \leq \alpha(x) < 2\sigma$ e per ogni numero $0 < \theta \leq 1$, si abbia

$$(2) \quad \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} | H'^{(r)}_{U(y)}[x, y; \theta U(y) + \alpha(y)] | \, dy < m , \qquad (r = 1, 2, \ldots, p) .$$

Indicando poi con $\nu$ il massimo modulo della $U(x)$, che naturalmente risulterà funzione della rimanente costante $c$, determiniamo quest'ultima in modo che, assieme colle (2), rimanga soddisfatta anche la relazione

$$(3) \qquad \frac{\sigma}{\nu + \sigma} > k .$$

Supposto che il sistema delle precedenti $p + 1$ in equazioni nelle $p + 1$ incognite $c_r$ e $c$ sia compatibile, ammetteremo d'aver fatto nella (1) la tra-

[1] Con metodo simile a quello qui usato, ho risoluto altri tipi di equazioni non lineari che ho considerato in due mie recenti Memorie, delle quali la prima *Sulle equazioni integrali non lineari*, apparirà nel fascicolo 1-2 del vol. XXXI degli Annali di matematica, e la seconda, dal titolo *Sulle equazioni integrali non lineari con operazioni funzionali singolari*, trovasi in corso di stampa nel Giornale di matematiche.

[2] A questa condizione si potrebbe sostituire la seguente: che le $K^{(r)}[x, y; U(y)]$, per ogni funzione $\omega(y)$, siano tali da aversi

$$| K^{(r)}[x, y; U(y) + \omega(y)] - K^{(r)}[x, y; U(y)] | \leq |\omega(y)| \, |F^{(r)}(x, y)| ,$$

sotto la condizione che le funzioni $|F^{(r)}(x, y)|$ siano integrabili.

sformazione di cui sopra. Ciò non di meno noi, per semplicità, continueremo ad usare ancora gli stessi simboli.

3. Supposto pel momento che sia

$$(4)\qquad |h(x)-u(x)|<\sigma,$$

poniamo

$$h(x)-\omega_1(x)=u_1(x)=u(x).$$

Per la (4) avremo subito $|\omega_1(x)|<\sigma$. Similmente, posto

$$h(x)-\omega_2(x)=u_2(x)=u(x)-\lambda\sum_{r=1}^{p}\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)}K^{(r)}[x,y;h(y)-\omega_1(y)]\,dy=$$
$$=u(x)-\lambda\sum_{r=1}^{p}\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)}K^{(r)}[x,y;u_1(y)]\,dy.$$

Sostituendo alla $u(x)$ il suo valore dato dalla (1), s'ottiene

$$\omega_2(x)=\lambda\sum_{r=1}^{p}\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)}\{K^{(r)}[x,y;h(y)-\omega_1(y)]-K^{(r)}[x,y;h(y)]\}\,dy=$$
$$=-\lambda\sum_{r=1}^{p}\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)}\omega_1(y)\,K'^{(r)}_{h(y)}[x,y;h(y)-\theta^{(r)}\omega_1(y)]\,dy;\ ([1])$$

con $0<\theta^{(r)}<1$. E poichè

$$h(y)-\theta^{(r)}\omega_1(y)=u(y)+(1-\theta^{(r)})\,\omega_1(y)=u(y)+\theta_1^{(r)}\omega_1(y),$$

sarà

$$|\omega^2(x)|<|\lambda|\sigma\sum_{r=1}^{p}\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)}|K'^{(r)}_{u(y)}[x,y;u(y)+\theta_1^{(r)}\omega_1(y)]|\,dy$$

e quindi, per la (2),

$$|\omega_2(x)|<|\lambda|pm\sigma=\varrho\sigma.$$

Per esigenze di spazio rimandiamo il sèguito ad altra Nota.

[1] Invero, se $\alpha$ è un valore di $y$ per cui la funzione integranda diviene infinita, si può scrivere:

$$\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)}\{K^{(r)}[x,y;h(y)-\omega_1(y)]-K^{(r)}[x,y;h(y)]\}\,dy=\lim_{\varepsilon,\eta=0}\left\{\int_{\mu_r(x)}^{\alpha-\varepsilon}+\right.$$
$$\left.+\int_{\alpha+\eta}^{g_r(x)}\right\}\{K^{(r)}[x,y;h(y)-\omega_1(y)]-K^{(r)}[x,y;h(y)]\}\,dy=\lim_{\varepsilon,\eta=0}\left\{\int_{\mu_r(x)}^{\alpha-\varepsilon}+\right.$$
$$\left.+\int_{\alpha+\eta}^{g_r(x)}\right\}\omega_1(y)\,K'^{(r)}_{h(y)}[x,y;h(y)-\theta^{(r)}\omega_1(y)]\,dy=$$
$$=\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)}\omega_1(y)\,K'^{(r)}_{h(y)}[x,y;h(y)-\theta^{(r)}\omega_1(y)]\,dy.$$

Colla scrittura $K'^{(r)}_{h(y)}[x,y;h(y)-\theta^{(r)}\omega_1(y)]$ ed analoghe, bisogna poi intendere che prima si deve derivare la $K^{(r)}[x,y;h(y)]$ rispetto alla $h(y)$ e poi mutare $h(y)$ in $[h(y)-\theta^{(r)}\omega_1(y)]$.

Relatività. — *Lo spazio-tempo delle orbite kepleriane.* Nota I *di* F. P. Cantelli, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. L'idea più geniale della Relatività generale consiste nel riguardare la traiettoria di un punto materiale in un campo gravitazionale, quando si tenga conto del tempo, come una geodetica di uno spazio-tempo a quattro dimensioni.

È noto che Einstein caratterizza la metrica di questo spazio-tempo mediante certe equazioni alle derivate parziali, dette equazioni gravitazionali, che, pur involgendo una discretà arbitrarietà, hanno condotto a spiegare o a prevedere fenomeni confermati dalle osservazioni.

Sembra interessante di seguire un cammino inverso a quello accennato; cioè, partire dalle equazioni della traiettoria, considerando questa ultima come suggerita dalle osservazioni e, prescindendo da ogni considerazione di equazioni gravitazionali, esaminare quale debba essere la metrica di uno spazio-tempo affinchè quella traiettoria rappresenti una geodetica di esso.

In questa prima Nota mi occupo dello spazio-tempo che conduce alle orbite kepleriane.

2. La presenza di un'unica massa, ad esempio il Sole, genera uno spazio-tempo quadridimensionale il cui quadrato dell'elemento lineare, per intuitive e note considerazioni di simmetria [1], ha la forma

$$ds^2 = -e^{\lambda}\, dr^2 - e^{\mu}(r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \,.\, d\varphi^2) + c^2\, e^{\nu} \,.\, dt^2 \tag{1}$$

in cui $r, \theta, \varphi$ sono coordinate analoghe alle polari che fissano la posizione di un punto nello spazio [2]; $t$ è il tempo; $c^2$ il quadrato della velocità della luce; $\lambda, \mu, \nu$ sono tre funzioni della sola $r$, che tendono a zero per $r \to \infty$ poichè a distanza infinita dalla massa, generatrice dello spazio-tempo (1), quest'ultimo deve diventare euclideo.

(1) Cfr., ad. es., Palatini, *Lo spostamento del perielio di Mercurio*, ecc. (Nuovo Cimento, serie VI, vol. XIV, fascicolo luglio 1917).

(2) Si noti che $r$ non rappresenta, in generale, la distanza del punto materiale dal polo. Si rileverà però facilmente in seguito che se $r, r'$ sono i parametri che fissano la posizione di due punti sopra una linea $\theta = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ (geodetica) uscente dal polo, $r$-$r'$ esprime la distanza dei due punti, a meno di una quantità trascurabile, quando essi siano sufficientemente lontani dal polo.

Per le ragioni di simmetria addotte, la traiettoria di un punto materiale, quando si elimini il tempo, ha luogo in un piano (più precisamente superficie geodetica), $\theta = \text{cost.}$ che possiamo supporre sia il piano $\theta = \frac{\pi}{2}$; è perciò che ci limitiamo a considerare lo spazio-tempo tridimensionale il cui quadrato dell'elemento lineare è:

$$(2) \qquad ds^2 = -e^{\lambda}\,dr^2 - e^{\mu}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2\,e^{\nu}\,dt^2 .$$

Per la determinazione delle funzioni incognite $\lambda, \mu, \nu$ ricaveremo la equazione in $r, \varphi$ della traiettoria, rappresentatrice di una geodetica dello spazio-tempo (2), e la identificheremo con la nota equazione, in coordinate polari, col polo nel fuoco, di una conica.

3. Le tre equazioni di una geodetica dello spazio-tempo (2) equivalgono, a determinazione fatta, alla (2) stessa e alle altre:

$$(3) \qquad e^{\mu}\,r^2\frac{d\varphi}{ds} = h, \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2}\,e^{-\nu},$$

essendo $k, h$ due costanti di integrazione. La eliminazione di $dt, ds$ tra (2) e (3), quando si ponga $u = {}^1/_r$, conduce, dopo i necessari passaggi, alla equazione

$$(4) \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + e^{\mu-\lambda}\,u + \frac{1}{2}\,\frac{de^{\mu-\lambda}}{du}\,u^2 = \frac{1}{2}\,\frac{k^2}{c^2h^2}\,\frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} - \frac{1}{2h^2}\,\frac{de^{2\mu-\lambda}}{du}$$

che identificheremo con l'equazione

$$(5) \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = a = \text{cost.}$$

la quale ammettiamo sia giustificata dalle osservazioni.

Le funzioni $\lambda, \mu, \nu$, non dipendenti da $k, h$, debbono condurre alla (5) in cui $a$ deve essere, in generale, dipendente da $k, h$.

Ponendo $a = f(k, h)$, il paragone fra (4), (5) conduce a scrivere

$$(6) \qquad \begin{cases} \psi(u) = e^{\mu-\lambda}\,u + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{de^{\mu-\lambda}}{du}\,u^2 - u \\[2ex] \psi(u) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{k^2}{c^2h^2}\,\dfrac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} - \dfrac{1}{2h^2}\,\dfrac{de^{2\mu-\lambda}}{du} - f(k, h) \end{cases}$$

nell'ultima delle quali va considerata come incognita anche $f(k, h)$.

4. Dalla prima delle (6) risulta che $\psi(u)$ deve essere indipendente da $k, h$. Derivando, pertanto, la seconda delle (6), parzialmente, prima rispetto a $k$ e poi rispetto ad $h$, deve aversi identicamente

$$(7) \qquad \begin{cases} f'_k(k, h) = -\dfrac{k}{c^2h^2}\,\dfrac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} \\[2ex] f'_h(k, h) = -\dfrac{1}{h^3}\,\dfrac{k^2}{c^2}\,\dfrac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} + \dfrac{1}{h^3}\,\dfrac{de^{2\mu-\lambda}}{du}. \end{cases}$$

I primi membri delle (7) debbono essere indipendenti da $u$; altrettanto deve essere dei secondi membri. Essendo, pertanto, $\alpha$, $\beta$ due costanti qualsiasi, indipendenti da $k$, $h$, dobbiamo scrivere

$$(8) \qquad \frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} = \alpha, \qquad \frac{de^{2\mu-\lambda}}{du} = \beta$$

e poichè $\mu$ e $\lambda$ debbono tendere a zero per $u \to 0$, si deduce

$$(9) \qquad e^{2\mu-(\nu+\lambda)} = \alpha u + 1, \qquad e^{2\mu-\lambda} = \beta u + 1.$$

Le (7), (9) forniscono ovviamente

$$(10) \qquad f(k, h) = a = \frac{1}{2}\frac{k^2\alpha}{c^2 h^2} - \frac{\beta}{2h^2} + \gamma$$

essendo $\gamma$ una nuova costante indipendente da $k$, $h$. Sostituendo la (10) nella seconda delle (6), e tenendo presenti le (9), risulta $\psi(u) + \gamma = 0$ la quale, per la prima delle (6), dà un'equazione differenziale in $e^{\mu-\lambda}$, $u$, che integrata fornisce

$$(11) \qquad e^{\mu-\lambda} = 1 - \frac{2\gamma}{u} + \frac{\delta}{u^2}$$

e, poichè il primo membro di (11) per $u \to 0$ deve tendere all'unità, deve essere

$$(12) \qquad \gamma = \delta = 0.$$

5. Le (9), (10), (11), (12) portano a scrivere

$$(13) \qquad e^{\nu} = \frac{\beta u + 1}{\alpha u + 1}; \qquad e^{\mu} = e^{\lambda} = \beta u + 1$$

$$(14) \qquad f(k, h) = a = \frac{1}{2h^2}\left(\frac{k^2\alpha}{c^2} - \beta\right).$$

Si può concludere che affinchè lo spazio-tempo quadridimensionale (1), soddisfacente alla condizione posta

$$\lim_{r \to \infty} \nu = \lim \mu = \lim \lambda = 0,$$

ammetta geodetiche che possano essere rappresentate da traiettorie di equazione

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = a,$$

è necessario e sufficiente che valgano le (13), essendo $\alpha$, $\beta$ due costanti arbitrarie, indipendenti, come si è detto, da $h$, $k$ che hanno il significato fornito dalle (3). Il valore di $a$ è allora dato dalla (14).

Relatività. — *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria.* Nota I di Enrico Fermi, presentata dal Corrispondente G. Armellini.

1. Per fare lo studio dei fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria, cioè, in linguaggio non relativistico, in una porzione di spazio, variabile eventualmente col tempo, ma sempre molto piccola in confronto alle divergenze dall'euclideità, della varietà spazio-tempo, converrà anzi tutto ricercare un opportuno riferimento tale che, in vicinanza della linea studiata, il $ds^2$ della varietà prenda una forma semplice. Per trovare questo riferimento, dobbiamo premettere qualche considerazione geometrica.

Sia data in una varietà riemanniana $V_n$, od anche in una varietà metricamente connessa nel senso di Weyl (1), una linea L. Associamo ad ogni punto P di L una direzione $y$, perpendicolare ad L, con la legge che la direzione $y + dy$, relativa al punto $P + dP$, si deduca da quella $y$ relativa a P, nel seguente modo: Sia $\eta$ la direzione tangente ad L in P; si trasportino parallelamente (2) $y$, $\eta$ da P in $P + dP$ e siano $y + \delta y$, $\eta + \delta\eta$ le direzioni così ottenute, che per le proprietà fondamentali del trasporto parallelo saranno ancora ortogonali. Se L non è geodetica $\eta + \delta\eta$ non coinciderà con la direzione $\eta + d\eta$ della tangente ad L in $P + dP$, e queste due direzioni individueranno in $P + dP$ una giacitura. Consideriamo in $P + dP$ l'elemento di $S_{n-2}$ perpendicolare ad essa e ruotiamo rigidamente attorno a tale $S_{n-2}$ tutta una particella circostante $P + dP$, fino a che $\eta + \delta\eta$ non vada a sovrapporsi ad $\eta + d\eta$. Allora $y + \delta y$ andrà a finire in una posizione che prenderemo come direzione $y + dy$ relativa al punto $P + dP$. Si intende bene come, fissata a piacere la direzione $y$ in un punto di L, un processo di integrazione permetta di conoscerla per tutti i punti di L.

Cerchiamo ora le espressioni analitiche traducenti le operazioni indicate per una varietà riemanniana, che sono identiche a quelle valevoli per una varietà metrica di Weyl purchè si abbia l'avvertenza di scegliere la « Eichung » in guisa che la misura di un segmento, che si muova rigidamente nelle vici-

(1) Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, pag. 109. Berlin, Springer, 1921.
(2) T. Levi-Civita, Rend. Circ. Palermo, tomo XLII, pag. 173, an. 1917.

nanze di L, sia costante. Sia

$$(1)\qquad ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

e siano $y_i, y^{(i)}; \eta_i, \eta^{(i)} = \frac{dx_i}{ds}$ i sistemi co- e controvarianti delle direzioni $y, \eta$. Avremo intanto

$$\frac{\delta \eta^{(i)}}{ds} = -\sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix} \right\} \eta^{(h)} \frac{dx_l}{ds} = -\sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds};$$

è inoltre $\frac{d\eta^i}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{dx_i}{ds} = \frac{d^2 x_i}{ds^2}$. Si trova dunque

$$\frac{\delta\eta^{(i)} - d\eta^{(i)}}{ds} = -\left( \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} \right) = -\mathrm{C}^i.$$

Le $\mathrm{C}^i$ sono le componenti controvarianti del vettore C, curvatura geodetica, cioè di un vettore che ha l'orientazione della normale principale geodetica di L e grandezza eguale alla sua curvatura geodetica.

Si ha d'altra parte

$$(2)\qquad \frac{\delta y^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds}.$$

Ora, siccome $y$ è perpendicolare ad L, lo spostamento, con cui da $y + \delta y$ si deduce $y + dy$, sarà parallelo alla tangente ad L e avrà grandezza eguale alla proiezione sopra $y$ stesso di $\delta\eta - d\eta$; vale a dire, siccome $y$ ha lunghezza 1, al prodotto scalare di $\delta\eta - d\eta$ per $y$, cioè

$$\sum_i (\delta\eta_i - d\eta_i)\, y^{(i)} = -ds \sum_i \mathrm{C}_i y^{(i)}.$$

Le sue componenti controvarianti si otterranno dunque moltiplicando la sua grandezza per le coordinate controvarianti della tangente ad L, cioè $\frac{dx_i}{ds}$. Esse son dunque, in ultima analisi, $-dx_i \sum_r \mathrm{C}_r y^{(r)}$. Da (2) risulta ora immediatamente

$$(3)\qquad \frac{dy^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds} - \frac{dx_i}{ds} \sum_h \mathrm{C}_h y^h.$$

La (3), scritta per $i = 1, 2, \dots, n$, dà un sistema di $n$ equazioni differenziali del primo ordine tra le $n$ incognite $y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(n)}$ che risultano così determinate, una volta che ne siano assegnati i valori iniziali. Sarebbe anche facile verificare formalmente dalle (3) che, se i valori iniziali delle $y^{(i)}$ soddisfano la condizione di perpendicolarità ad L, tale condizione resta verificata lungo tutta la linea.

2. In un punto $\mathrm{P}_0$ di L assegnamo ora a piacere $n$ direzioni $y_1 y_2 \dots y_n$ mutuamente ortogonali, con la condizione che $y_n$ sia tangente ad L. Le direzioni $y_1 y_2 \dots y_{n-1}$ saranno perpendicolari ad L e potremo trasportarle lungo L con la legge assegnata al § precedente che, come è evidente dalla

sua stessa definizione, conserva la loro ortogonalità. In tale modo veniamo ad associare ad ogni punto di L $n$ direzioni mutuamente ortogonali, di cui l'ultima è quella della tangente ad L. Pensiamo ora la nostra $V_n$ immersa in un $S_N$ euclideo a un numero conveniente di dimensioni. Possiamo prendere come coordinate di un punto di $V_n$ le coordinate cartesiane ortogonali della sua proiezione sopra l'$S_n$ tangente a $V_n$ in un punto generico P di L, aventi per origine P e per direzioni le direzioni $y_1 y_2 \dots y_n$ relative al punto P. Con tali coordinate l'elemento metrico di $V_n$ in P prende la forma $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$; esse inoltre, come immediatamente si riconosce, sono geodetiche in P. Vale a dire, per le coordinate $y$ si può nell'intorno di P porre, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, $g_{ii} = 1$ $g_{ik} = 0$ $(i \neq k)$. È manifesto che di tali riferimenti ne avremo uno per ogni punto di L. Consideriamo ora un punto $Q_0$ di $V_n$ che nel riferimento relativo al punto $P_0$ di L abbia coordinate $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1}, 0$. Per ogni altro punto P di L possiamo allora determinare un punto Q che, nel riferimento relativo a P, abbia le stesse coordinate che ha $Q_0$ nel riferimento relativo a $P_0$. Il punto Q percorrerà così una linea di decorso parallelo ad L. Vogliamo ora trovare la relazione che lega $ds_Q$ a $ds_P$ nell'ipotesi che Q sia infinitamente prossimo a P. Perciò osserviamo che lo spostamento che porta Q in $Q + dQ$ è composto degli spostamenti indicati al § 1 con $\delta$ e con $d - \delta$ e che il primo, essendo uno spostamento parallelo, fornisce, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $\delta s_Q = ds_P$; il secondo è una rotazione che, come si è visto al § 1, dà $(d - \delta)\, s_Q = ds_P\, C \times Q - P$, se con $\times$ si indica il simbolo del prodotto scalare e con $Q - P$ il vettore di origine P e termine Q. Inoltre $ds_Q$ e $(d - \delta)\, s_Q$ hanno entrambi la direzione della tangente in L. Si ha dunque $ds_Q = \delta s_Q + (d - \delta)\, s_Q$; cioè

$$ds_Q = ds_P [1 + C \times Q - P]. \tag{4}$$

Le traiettorie dei punti Q formano una $(n-1)^{\text{upla}}$ infinità di linee e quindi, almeno con opportune limitazioni, per ogni punto M di $V_n$ passerà una di tali linee; così che potremo caratterizzare M mediante le coordinate del punto Q, $\bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_{n-1}$ corrispondenti alla linea passante per M, e l'arco $s_P$ di linea L contato da un'origine arbitraria fino a quel punto P che corrisponde al Q coincidente con M.

Se M è infinitamente prossimo ad L, $ds_Q$ sarà perpendicolare alla ipersuperficie $s_P =$ costante. Si avrà perciò

$$ds_M^2 = ds_Q^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^2 ;$$

e, tenendo presente (4),

$$ds_M^2 = (1 + C \times M - P)^2\, ds_P^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^2. \tag{5}$$

Nelle vicinanze di L abbiamo con ciò trovata una espressione semplicissima del $ds^2$.

## Fisica. — *Il contributo di A. Bartoli nella previsione termodinamica della pressione della luce.* Nota di Paolo Straneo, presentata dal Socio A. Di Legge.

Le considerazioni termodinamiche del Bartoli sulla pressione delle radiazioni, per quanto segnalate ai fisici dal Boltzmann fin dal 1884 in due scritti sui diffusissimi *Annalen der Physik*, vengono raramente ricordate dagli autori di trattati o di studî sulla teoria dell'irraggiamento, o, ciò che è peggio, vengono talvolta ricordate in modo inesatto, non tenendo conto di certe limitazioni che pur erano state chiaramente espresse; e quindi attribuendo al Bartoli pretese dimostrazioni, che egli non aveva davvero pensato di poter dare, e che oggi si sanno impossibili.

Convinto d'altra parte che nelle esposizioni della teoria dell'irraggiamento secondo l'attuale tendenza, ad un certo punto, debbano trovar posto logicamente, e quasi direi necessariamente, considerazioni perfettamente analoghe a quelle del Bartoli, ho voluto trattare secondo lo stesso concetto fondamentale, ma con criterî più moderni, la questione che egli si era proposta ed aveva risolta fin dal 1876 (¹) Questo lavoro, che eccede i limiti di spazio imposti a questi Rendiconti, verrà pubblicato prossimamente nel Nuovo Cimento.

Però, essendo stata altra volta qui ricordata l'opera del Bartoli su questo argomento dai chiar. proff. Ròiti e Volterra nella relazione e nelle Note ad una sua Memoria postuma (²), ed essendo altresì stato espresso il desiderio che venissero chiariti alcuni punti oscuri, mi permetto di esporre brevemente i risultati di quella mia ricerca che hanno attinenza all'opera del Bartoli.

***

Ogni moderna teoria dell'irraggiamento termico consiste essenzialmente nella logica applicazione dei principî della termodinamica ad una determinata teoria ottica. La via, che di preferenza si segue attualmente nell'esporre

(¹) *Sopra i movimenti prodotti dalla luce e dal calore e sopra il radiometro di Crookes*, Firenze, Le Monnier, 1876.

(²) Ved. questi Rendiconti, vol. XII, 2° sem., ser. 5ª, pag. 345.

una tale teoria, è quella adottata dal Planck nelle sue classiche *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung.*

Essa porta a considerare, *in un primo tempo*, l'energia raggiante come un'energia che si suppone diffondersi con velocità finita, e quindi localizzata nello spazio, ma da un punto di vista puramente energetico, senza alcuna ipotesi sulla sua particolare natura. Applicando a questa generalissima concezione fisica le leggi della termodinamica, si giunge alle più generali conclusioni della teoria dell'irraggiamento, che valgono indipendentemente dalla teoria ottica che si ammetterà in seguito, e quindi per tutte le teorie ottiche, purchè solamente ammettano la propagazione, con velocità finita, dell'energia raggiante, che loro particolarmente compete. Sono queste le leggi fondamentali della teoria dell'irraggiamento, fra le quali culmina l'importantissima legge di Kirchhoff.

Solamente *in un secondo tempo* si scende a più particolari specificazioni ammettendo una speciale teoria ottica e deducendo le conseguenze che derivano logicamente dalle leggi fondamentali precedenti e da questa particolare ammissione.

Un vantaggio rilevante di questo metodo è quello di permettere facili paralleli fra le conseguenze corrispondenti alle differenti teorie ottiche, per esempio fra quelle corrispondenti alla teoria elettromagnetica e quelle corrispondenti alla teoria corpuscolare, come mostra il Planck stesso nel § 60 delle citate *Vorlesungen*, ove trae appunto da questo confronto una conferma in favore della teoria Maxwelliana.

Senonchè questa via, così logica, non è in generale seguita sistematicamente fino in fondo. Infatti nella parte delle considerazioni puramente energetiche, si fa intervenire d'ordinario quasi esclusivamente il primo principio della termodinamica, e non il secondo, che invece si applica poi ampiamente quando si è introdotta la teoria ottica particolare.

Ciò porta il grave inconveniente che rimangono nell'ombra importanti leggi fondamentali che vengono poi a risultare solamente più tardi e conglobate colle conseguenze della speciale teoria ottica ammessa.

Per esempio, introducendo la teoria elettromagnetica e conseguentemente la nozione ed il valore della pressione delle radiazioni che ad essa compete, viene immediatamente a risultare che ad una data riduzione di volume di una data cavità perfettamente speculare attorno ad un corpo irraggiante corrisponde necessariamente una determinata spesa di lavoro meccanico. Introducendo invece la teoria corpuscolare e la corrispondente pressione delle radiazioni, si trova che alla stessa diminuzione di volume della cavità speculare corrisponde una differente spesa di lavoro. Ora, siccome questi due lavori risultano intimamente legati, anzi proporzionali, alle due differenti pressioni che corrispondono alle due teorie, il fatto della necessità di spendere un lavoro per quella deformazione della cavità viene ad essere, in certo

modo, posto ad uno stesso livello coll'esistenza della pressione stessa; ciò che quasi indurrebbe a ritenere che quel lavoro di deformazione potrebbe essere nullo in una teoria ottica che non implicasse necessariamente l'esistenza di una pressione delle radiazioni. Ad ogni modo non risulta affatto evidente che, indipendentemente da qualsiasi teoria ottica ammessa, sia sempre necessario di spendere un lavoro per eseguire una deformazione come quella sopra detta.

Le considerazioni del Bartoli, ove venissero esposte prima di chiudere la parte puramente energetica della teoria dell'irraggiamento, eliminerebbero il rilevato inconveniente, perchè permetterebbero di dimostrare che il secondo principio della termodinamica esige che alla diminuzione di volume di un involucro speculare intorno ad un corpo irraggiante debba corrispondere sempre una spesa di lavoro. La scelta particolare fra le infinite teorie ottiche logicamente possibili, colla quale dovrebbe iniziarsi la seconda parte della trattazione, più non apparirebbe quindi arbitraria, ma bensì, come di fatto è, soggetta non solo alla condizione fondamentale, più volte ricordata, di ammettere una velocità di propagazione finita per le proprie radiazioni, ma anche alla condizione che debba necessariamente corrispondere una spesa di lavoro ad ogni contrazione di un involucro speculare pieno di irraggiamento. Risulterebbe però anche (e questo è il punto di capitale importanza) che questo lavoro non può venir determinato completamente mediante considerazioni energetiche, e che perciò rimane ancora un largo campo di arbitrarietà nella scelta della teoria ottica.

Infatti il Bartoli, considerando un esperimento ideale fondato su deformazioni di superficie perfettamente riflettenti (considerazioni che oggi sono divenute correnti, ma che allora rappresentavano ancora una quasi assoluta novità e sollevavano molte obbiezioni), era giunto appunto a questa conclusione.

Nella mia prossima pubblicazione sul Nuovo Cimento mostrerò come, rendendo invertibile il ciclo di trasformazioni considerato, per mezzo di un'insignificante modificazione, ed applicandovi quindi il secondo principio della termodinamica in forma di equazioni, anzichè di inequazioni, quali converrebbero ad un ciclo non invertibile, si possa dare alla scoperta del Bartoli una forma matematicamente rigorosa. Essa, in ultima analisi, non è altro se non l'espressione della *necessaria* relazione fra la temperatura T del corpo irraggiante, la densità dell'energia irradiata $\psi(T)$, ed una funzione $\varphi(T)$, caratteristica del lavoro che si deve spendere per ridurre il volume di una cavità speculare contenente il corpo irraggiante:

$$\varphi(T) = T \int \frac{\psi(T)}{T^2}\, dT .$$

A questa relazione, che è una delle poche leggi puramente energetiche che si conoscono, propongo sia dato il nome di *legge di Bartoli*.

A questo punto conviene ricordare come il Bartoli con fine intuizione aggiungesse che *la più semplice ipotesi* per spiegare la spesa di lavoro sopradetta fosse quella di ammettere l'esistenza di una pressione delle radiazioni. Ma non solo non affermava la necessità di tale ipotesi, ma, nello stesso scritto ove l'enunciava per la prima volta, prometteva di dare, come in seguito tentò, altre ipotesi, che secondo lui dovevano egualmente bene risolvere la difficoltà.

Errano quindi coloro che affermano che il Bartoli abbia creduto di poter dimostrare *termodinamicamente* l'esistenza della pressione della luce, che *termodinamicamente* invece non può essere dimostrata.

Ammettendo l'esistenza di una pressione della luce $p(\mathrm{T})$, come semplice ipotesi generale, ma senza ulteriori specificazioni sulla sua essenza fisica, l'espressione della legge del Bartoli si trasforma immediatamente nella relazione

$$\mathrm{T}\,dp(\mathrm{T}) - p(\mathrm{T})\,d\mathrm{T} = \psi(\mathrm{T})\,d\mathrm{T}$$

dedotta dal Boltzmann fin dal 1882 ripetendo le considerazioni del Bartoli, ed ammettendo senz'altro l'ipotesi della pressione.

Essa non è più una relazione puramente energetica, perchè contiene la particolare ammissione fisica dell'esistenza della pressione delle radiazioni; perciò non conviene più a tutte indistintamente le teorie ottiche, ma solamente a tutte quelle teorie che implicano una qualsiasi pressione della luce.

Essa non è però ancora una relazione caratteristica di una particolare teoria dell'irraggiamento, ma lo diviene immediatamente appena si esprima una qualsiasi delle due funzioni $p(\mathrm{T})$ o $\psi(\mathrm{T})$ in funzione dell'altra, secondo una determinata teoria ottica.

Questo appunto fece il Boltzmann ponendo, in accordo alla teoria di Maxwell, $p(\mathrm{T}) = 1/3\ \psi(\mathrm{T})$, ricavandone così una relazione caratteristica dell'attuale teoria dell'irraggiamento, dalla quale potè con una semplice integrazione dedurre la nota legge che lo Stefan aveva sperimentalmente scoperto qualche anno prima.

***

Per esaurire l'analisi storica dell'opera del Bartoli, è bene di chiarire alcuni punti secondarî, che dànno talora luogo ad equivoci.

Egli, che aveva così esattamente dimostrata la necessità della spesa di un lavoro per ogni diminuzione di volume di una cavità speculare contenente un corpo irraggiante, ed intuita la probabilità che esso fosse dovuto ad una pressione delle radiazioni, ammise poi, senza alcuna plausibile ragione, che quella pressione dovesse essere eguale alla densità dell'energia raggiante dell'ambiente. Ciò lo avrebbe senza dubbio condotto a conclusioni numeriche errate, se non fosse avvenuta una strana compensazione. Infatti egli aveva

sempre considerato nei suoi esperimenti ideali solamente l'energia raggiante propagantesi in una determinata direzione e non, come ora generalmente si usa, l'energia totale, propagantesi in tutte le direzioni; più precisamente, considerando due sfere concentriche, aveva tenuto conto solamente dell'energia propagantesi dall'una all'altra in senso radiale, la quale, come è noto, è solamente la terza parte dell'energia totale. Quindi, senza rendersene conto, aveva ammesso fra pressione e densità di energia la relazione corrispondente alla teoria di Maxwell e così ottenuto i valori numerici che l'esperienza ha poi confermati.

Ancor più strana è la coincidenza che egli trovò fra quella sua espressione della pressione della luce in funzione della densità dell'energia (che, come abbiamo veduto, concordava colla teoria di Maxwell) e l'espressione datane dall'Hirn, nell'ipotesi dell'ottica corpuscolare, cui deve invece corrispondere un valore doppio. Ciò è dovuto ad un equivoco dell'Hirn, il quale ammise che la pressione dovuta all'urto di corpuscoli cadenti normalmente su di una parete assorbente sia uguale alla forza viva di essi divisa per la velocità, ossia a $\frac{mv}{2}$, anzichè alla quantità di moto $mv$; così la pressione su di una parete riflettente, che è eguale al doppio di quella su di una parete assorbente, gli risultò anche solamente la metà di quanto avrebbe dovuto.

## Fisica. — *Sulla diffusione dell'idrogeno, dell'elio e del neon attraverso il vetro riscaldato* (1). Nota di Ettore Cardoso, presentata dal Socio E. Paternò.

Il prof. Lo Surdo (2) ha pubblicato recentemente, in questi Rendiconti, i risultati di certe sue esperienze relative al passaggio dell'idrogeno, dell'elio e del neon attraverso tubi di vetro riscaldati. Queste diffusioni, che, per l'idrogeno e l'elio almeno, erano già ammesse o supposte da qualche sperimentatore (3), vengono ad entrare, per merito delle belle esperienze di A. Lo Surdo, nel dominio dei fatti sperimentali saldamente stabiliti.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica-fisica della R. Università di Napoli.

(2) Rend. Acc. Lincei, 1921, XXX, pag. 85.

(3) Nel 1911, il compianto prof. J. M. Crafts, col quale effettuavo una serie di misure col termometro a gas, ebbe a dirmi, a varie riprese, che aveva scelto l'azoto, come gas termometrico, invece dell'idrogeno o dell'elio, perchè, parecchi anni prima, aveva osservato che, a caldo, questi gas attraversavano le pareti di vetro (*Jena*, 16, III) dei suoi termometri, falsando le misure. Simili constatazioni ebbi a fare anch'io, più tardi, con un termometro ad idrogeno, in vetro fusibile di Turingia.

L'autore vede inoltre nei fenomeni di diffusione, da lui messi in evidenza, la spiegazione delle singolari discordanze che esistono fra le varie osservazioni sperimentali riguardanti il dibattuto problema della così detta trasmutazione dell'idrogeno, in elio e neon.

Quest'ultima questione è, però, così importante, che credo opportuno tornare sull'argomento, tanto più che sono del parere che l'interpretazione del Lo Surdo non rechi ancora la luce desiderata.

***

I sigg. Collie, Patterson e Masson (¹) avevano previsto la eventualità del passaggio dell'elio e del neon, dall'aria, nei loro tubi di scarica, riscaldati da un forte eccitamento, e, per evitare questo possibile inconveniente, ebbero cura, in diverse esperienze di controllo, di attorniare i loro tubi laboratorio con camicie di vetro, facendo il vuoto nello spazio intermedio.

Malgrado ciò, la presenza dell'elio e del neon fu riscontrata dopo il passaggio della scarica. Mi sembra, quindi, che in tali condizioni sperimentali sia ben difficile di poter spiegare il fenomeno parlando di diffusioni.

D'altra parte, in nessuna delle esperienze dei sigg. Strutt, Merton, nè in quelle da me effettuate in collaborazione col prof. A. Piutti, fu riscontrata la presenza di questi gas nobili (²). Non è inutile ricordare che le nostre esperienze furono fatte con e senza camicia protettrice, e la sensibilità del metodo di ricerca era sufficiente per accertare la presenza del neon contenuto in $^1/_{20}$ di $cm^3$. di aria.

Continuando l'analisi delle esperienze, si può osservare che, per verificare il passaggio dell'elio e del neon, il Lo Surdo ha dovuto immergere il tubo di vetro scaldato in un'atmosfera ricchissima di elio e contenente notevoli quantità di neon (elio aeronautico), mentre nelle esperienze di Collie, Patterson e Masson, e nelle nostre, il tubo di scarica, quando non era protetto da una camicia, era semplicemente attorniato da aria atmosferica, che contiene, come si sa, quantità infinitamente minori di elio e di neon di quelle contenute nell'elio aeronautico.

Si può aggiungere che non risulta che il prof. Lo Surdo abbia osservato la diffusione dell'elio e del neon atmosferici nei suoi tubi scaldati.

***

Io credo che queste brevi considerazioni dimostrino che i fenomeni di diffusione, di cui tratta il prof. Lo Surdo, siano insufficienti a spiegare le

(¹) Trans. Chem. Soc., 1913, pag. 419 e Proc. Roy. Soc., 1914, A. 91, pag. 30.
(²) Strutt, Proc. Roy. Soc., 1914, A. 89, pag. 499; Merton, ibid., 1914, A. 89, pag. 519; Piutti e Cardoso, Gazz. chim. ital., 1920, pag. 5, e J. ch. phys., 1920, *18*, pag. 81.

discordanze riguardanti la presenza dell'elio e del neon nei tubi di scarica contenenti idrogeno.

Quest'ultima questione, del resto, è certamente molto più complessa ed ancora oscura. Forse la spiegazione di questi fenomeni sarà piuttosto da ricercarsi nelle condizioni in cui si effettua la scarica, conformemente al parere emesso da Baly [1], al quale accennai sulla memoria suricordata.

## Fisica terrestre. — *Sul movimento ondoso del mare e delle navi.* Nota I di Emilio Oddone, presentata dal Corrispondente L. Palazzo.

Uno dei problemi che interessano l'Oceanografia è la determinazione dell'ampiezza, lunghezza e periodo delle onde del mare.

Ed in parallelo, uno dei problemi pratici, che più interessano la navigazione, è la determinazione di quanto i moti del mare si riverberano sulle oscillazioni delle navi.

Tali dati si possono ottenere con apparecchi capaci di fissare esattamente certi elementi di moto del mare e della nave, primo tra tutti l'elemento *accelerazione verticale*. Il sismografo per la componente verticale serve per eccellenza a dare quelle accelerazioni: soltanto sotto l'usuale forma e colla sua troppa sensibilità non riesce pratico.

Val meglio ricorrere ai tipi più pigri, per esempio a quelli che reagiscono solo alle accelerazioni di alcune decine di Gals.

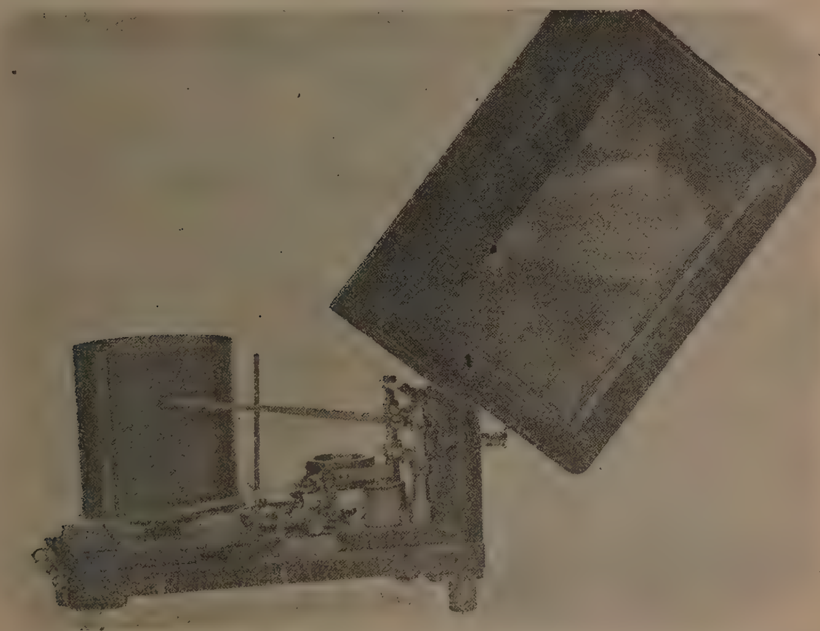
Mi parve che un apparecchio appropriato, per simili ricerche, potesse essere l'*inerziometro* in uso nell'aviazione; ed all'uopo, alla Direzione dell'Istituto Sperimentale Aeronautico di Montecelio chiesi a prestito il modello rappresentato nella vicina figura.

L'apparato consiste in una piccola massa d'ottone solidale a breve braccio pressochè orizzontale, libero di rotare per una sua estremità attorno ad una cerniera ad asse orizzontale, fissa alla scatola dell'apparecchio, la massa è tenuta in posizione d'equilibrio da due forze verticali eguali e contrarie che nascono da due specie di dinamometri stirati in contrasto. Perchè qualsiasi moto verticale impresso all'apparecchio riesca aperiodico, ossia affinchè le molle non introducano il periodo proprio, una delle stesse molle funziona da smorzatore, la qual cosa si ottiene tendendo una delle solite capsule aneroidiche, colla sola differenza che il suo interno è messo in comunicazione coll'aria esterna mediante piccolo foro. Quando il peso si abbassa sulla capsula a soffietto, l'aria non può uscire istantaneamente, per cui ne risultano delle varia-

(1) Annual Report of the Chemical Society for 1914, pag. 45; ibid. 1920, pag. 29. Cfr. pure F. Soddy, ibid., 1920, pag. 221.

zioni di pressione proporzionali alla velocità di uscita del gas, una condizione necessaria e sufficiente a produrre lo smorzamento, il quale, in definitiva. può ottenersi totale rimpicciolendo opportunamente il foro di uscita dell'aria.

Una pennina all'estremo di una leva scrive con forte ingrandimento il moto verticale relativo al supporto dell'apparecchio, su di una carta affumicata avvolta su di un tamburo, che un movimento di orologeria pone in rapida rotazione.



Portiamo quest'apparecchio a bordo di una nave e disponiamolo presso al metacentro per evitare, più che possibile, i movimenti di beccheggio e di rullìo. Vediamo tosto che esso sente le accelerazioni verticali della nave al punto di osservazione. L'apparecchio dà un grafico, che va interpretato come segue:

Il moto ondoso del mare imparte alla nave delle ampiezze di moto verticale, le quali variano col tempo secondo la

$$z = Z_m \sin(pt)\,. \tag{1}$$

L'equazione valevole per ogni sismografo verticale, nella supposizione che l'attrito sulla carta, su cui muove la penna, sia zero, è una relazione differenziale semplice, lineare di second'ordine a coefficienti costanti che si scrive:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' \pm n^2\theta + \frac{1}{l} z'' = 0 \tag{2}$$

col doppio segno perchè i sensi, del moto che risente l'apparato, sono due: verso l'alto e verso il basso.

La (2) integrata, dà un moto che è composizione del moto pendolare proprio alla massa dell'apparecchio e del moto della nave. Dalla massima ampiezza $L\theta_m$ che la penna, di braccio totale L ed elongazione $\theta_m$ scrive sul tamburo, si passa alla massima ampiezza verticale vera del moto della nave $Z_m$ mediante la

$$Z_m = \frac{L\theta_m}{I} \tag{3}$$

dove

$$I = \frac{L}{l}\,\frac{1}{U} \tag{4}$$

ed

$$U = \frac{T^2}{T_0^2} + 1 \tag{5}$$

per molla totalmente smorzata.

Sostituendo le (4) e (5) nella (3), viene:

$$Z_m = \frac{l}{L}\left(\frac{T^2}{T_0^2} + 1\right) L\theta_m . \tag{6}$$

Il quoziente $\frac{l}{L}$ è il reciproco dell'ingrandimento esterno e può ottenersi in due modi: dal rapporto tra la distanza del centro di gravità della massa all'asse di rotazione e la lunghezza totale del braccio, dalla pennina allo stesso asse di rotazione; ovvero dal rapporto tra le ampiezze di spostamento della massa e della pennina per effetto di un dato carico. È insomma una quantità nota.

$T_0^2$ si calcola mediante la formola:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 K}{\beta a^2} \tag{7}$$

dove K è il momento d'inerzia, $\beta$ quel peso che fa accorciare la molla dell'unità di lunghezza, $a$ la distanza dalla molla all'asse di rotazione. Il fattore $\frac{K}{\beta a^2}$ è detto *elongazione della molla* o *lunghezza del sistema pendolare ridotta*.

Le quantità $\frac{l}{L}$ e $T_0^2$ che entrano nella (6), essendo ora note, possiamo ricavare, per ogni periodo T ed ogni escursione smorzata $L\theta_m$ sul diagramma, il corrispondente $Z_m$ che è l'ampiezza massima di moto verticale della nave.

Approfittai dell'occasione che ero stato designato a compiere una missione oltre Oceano per sperimentare in viaggio, sul Mediterraneo e sull'Atlantico, il moto verticale delle navi dovuto al moto ondoso del mare.

Portai meco l'apparato a cui già ho accennato, comodissimo al trasporto, perchè contenuto in scatola dalle dimensioni di $17 \times 12 \times 10$ cm.

La massa inerte pesa 60 gr. e la penna registra con un ingrandimento $\frac{L}{l} = 18$. Il tamburo ruota colla velocità di circa cm. 0,12 al secondo. Il periodo strumentale calcolato ha il valore $T_0^2 = 0{,}0022$.

La formola (6) diventa:

$$Z_m = \frac{1}{18}\left(\frac{T^2}{0{,}0022} + 1\right) L\theta_m \,.$$

E noto $Z_m$ si ricava l'accelerazione dalla relazione:

$$Z''_m = \frac{4\pi^2}{T^2} Z_m \,. \tag{8}$$

Verificai il funzionamento assoggettando l'apparato, a moto armonico conosciuto. La bontà della teoria risultò dalla concordanza tra l'escursione verticale reale impressa all'apparecchio, ed il valore che per la medesima escursione deducevo teoricamente.

In una Nota successiva darò i risultati ottenuti nelle traversate Gibilterra-New-Jork e viceversa, estratti da circa cento diagrammi, colla registrazione di due mila sollevamenti ondosi delle navi « *Presidente Wilson* » (16.000 tonellate) e « *Duca degli Abruzzi* (8,000 tonellate).

## Fisiologia. — *Sulla tecnica delle fistole utreine sperimentali* [1]. Nota del dott. G. Amantea, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

In collaborazione col collega K. Krzyskowsky mi proposi già di estendere allo studio delle funzioni uterine il metodo delle fistole sperimentali: fu scelta la cagna come animale da esperimento, e furono comunicati all'Accademia medica di Roma [2] i risultati delle nostre prime ricerche positive.

Successivamente ho continuato a interessarmi dell'argomento, proponendomi innanzi tutto di perfezionare e di ampliare la tecnica operatoria; gli animali a tale scopo operati potevano inoltre essere utilizzati per eventuali osservazioni fisiologiche.

Ho potuto così attuare altri tipi di fistole uterine, che, unitamente a quelle ottenute con K. Krzyskowsky, rappresentano le principali, che era

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisiologico della R. Università di Roma diretto dal prof. S. Baglioni.

(2) G. Amantea e K. Krzyskowsky, Boll. d. R. Accad. Med. di Roma, anno XLVI, 1920.

possibile proporsi, e che con adeguate varianti, a seconda dei casi, potranno rendersi di utile applicazione fisiologica per lo studio delle funzioni uterine, sia dal punto di vista delle modificazioni connesse col periodo di fregola, sia da quello della motilità, della fecondazione, ecc.

Alle nostre prime ricerche sperimentali facemmo precedere uno studio anatomico topografico, allo scopo di accertare i rapporti dell'utero della cagna cogli organi vicini, nonchè di stabilire con esattezza la sua proiezione sulla superficie cutanea addominale, per ricavarne i dati necessarî all'esecuzione dell'operazione nel modo più esatto possibile sui varî tratti dei corni uterini. Dai nostri rilievi anatomici, in accordo con quanto già era noto al riguardo (1), risultò che l'utero nella cagna presenta due corni molto lunghi, i quali si staccano dal corpo molto breve a livello circa della VI-VII vertebra lombare, e divergono disponendosi ai lati del retto, nella direzione dei reni. Noi potemmo stabilire inoltre che una linea, la quale vada dal penultimo all'ultimo capezzolo, così a destra come a sinistra, incrocia presso a poco in corrispondenza del suo terzo medio, ad angolo acuto, il corno uterino corrispondente; cosicchè un taglio condotto lungo tale linea, per 4-5 cm., permette di raggiungere agevolmente e con sicurezza il corno omolaterale.

In una prima cagna si praticò l'operazione seguente: attraverso un taglio di circa 5 cm. fra l'ultimo e il penultimo capezzolo di destra si raggiunse il corno uterino omolaterale, e, sostenendolo fuori della ferita su due fili passati al disotto, si recise in corrispondenza del terzo medio a becco di flauto, rispettando il fascio vascolare; l'estremità recisa del moncone periferico fu chiusa con due punti di sutura introflettendone i margini, mentre l'estremità del moncone ovarico fu fistolizzata, fissandola opportunamente alla cute; la ferita addominale, suturata a strati successivi, fu protetta col collodion. Il risultato fu perfetto.

In una seconda cagna, con tecnica operatoria analoga, fu pure trasversalmente reciso al terzo medio il corno uterino destro, ma comprendendo anche il fascio vascolare, e fistolizzando poi, tanto l'estremità recisa del moncone ovarico, quanto quella del periferico.

A guarigione completa nei nostri due animali le fistole si presentavano sotto forma di piccolissime aperture imbutiformi, del diametro ciascuna di circa 2 mm. Nella seconda cagna ci fu possibile seguire anche le modificazioni durante un completo periodo di fregola e parte del periodo di gravidanza (2).

Avendomi questi primi tentativi convinto dei vantaggi del metodo, e avendo perciò stabilito di utilizzarlo per una serie di sistematiche ricerche fisiologiche, ho rilevato subito la necessità di poter disporre di animali, che permettessero di sorvegliare le modificazioni oltre che di un solo corno uterino, anche di entrambi i corni (destro e sinistro); nonchè di animali operati in maniera da potere sorvegliare direttamente l'orifizio uterino, ecc.

Ho perciò voluto tentare altri tipi di fistole in questo senso.

Mi è stato agevole attuare in una cagna bilateralmente, cioè tanto pel corno di destra quanto per quello di sinistra, la doppia fistola al terzo medio di ciascuno (fistola del moncone ovarico e fistola del moncone periferico). Ottenni così, in altre parole, a destra e a sinistra il risultato sopra descritto per la seconda cagna. L'operazione, in questo terzo animale, fu eseguita in due tempi.

Ho tentato pure con pieno successo la fistola del tratto iniziale dei due corni cioè, attraverso la solita incisione della parete addominale fra l'ultimo e il penultimo

---

(1) J. Athanasiu et J. Carvallo, *Chien*, in « Dictionnaire de Physiol. » di Ch. Richet; e W. Ellenberger u. H. Baum, *Anatomie des Hundes*, Berlin, 1891.

(2) G. Amantea e K. Krzyskowsky, l. c.

capezzolo di destra, ma condotta alquanto più medialmente che nei casi precedenti, mi fu possibile raggiungere la biforcazione dei corni dal corpo uterino; li recisi presso la biforcazione entrambi, insieme col fascio vascolare; chiusi con due punti di sutura l'apertura beante dei brevi monconi rimasti in continuità col corpo uterino introflettendone i margini, e fistolizzai quindi i due corni nel loro tratto più periferico.

Infine su altre due cagne mi proposi di rendere facilmente accessibile all'osservazione e all'esplorazione diretta l'orifizio del corpo uterino: in un caso raggiunsi il corpo uterino attraverso un' incisione di circa 6 cm. di lunghezza, condotta medialmente alla linea che congiunge l'ultimo col penultimo capezzolo; fu facile apprezzare colla palpazione il corpo uterino sotto la parete vaginale; con una piccola incisione longitudinale di quest'ultima, in corrispondenza del corpo stesso, stabilii il limite estremo anteriore della vagina, ove condurre un taglio a tutto spessore, circolare, senza ledere l'utero; ciò fatto, e allacciati i vasi recisi, chiusi con opportuni punti di sutura la ferita vaginale, e fissai quindi ai varî piani della parete addominale il corpo uterino, circondato da un breve manicotto vaginale residuale. Quest'ultimo, per l' inevitabile e facilmente comprensibile difetto di irrorazione, andò in necrosi nei giorni successivi; ma tale inconveniente restava compensato dal vantaggio fornito in primo tempo dallo stesso residuo vaginale, che fu utilizzato come mezzo di sostegno provvisorio, permettendo una provvisoria ma salda fissazione alla cute; il distacco del lembo necrotico avvenne infatti quando già il corpo uterino (che per l'impianto nella posizione voluta aveva dovuto subire una certa trazione, per quanto limitata) aveva contratto sufficienti aderenze cogli strati profondi (peritoneale, muscolare). È ovvio che in tali condizioni non si potè avere la guarigione per prima intenzione.

Nell'ultima cagna operata invece, dopo avere praticato la stessa incisione che nella precedente, con dolce trazione portai il tratto vaginale corrispondente al corpo uterino fino a livello del piano cutaneo, e in tale posizione lo fissai con punti di sutura successivamente al peritoneo, ai muscoli e al sottocutaneo, in modo da rimanere così delimitato dalla sutura un sufficiente tratto della superfice anterolaterale della vagina corrispondente al corpo uterino; incisi quindi, nel senso antero-posteriore, la parete vaginale fra i punti di sutura limitanti, suturandone i margini convenientemente alla cute. La guarigione avvenne per prima intenzione, e ottenni una fistola vaginale, precisamente tale da permettere l'esplorazione diretta dell' imbocco uterino.

Alle sei varietà di fistole uterine descritte bisogna aggiungerne una settima, consistente nella fistolizzazione di un corno nel suo tratto più periferico e dell'altro corno nel suo tratto più prossimo all'ovaio; e infine un'ottava che costituisce anche il primo tentativo diretto ad estendere il metodo delle fistole allo studio degli organi genitali, e che fu eseguito con risultato positivo dall'Ivanow (1): anzi da queste iniziali ricerche dell'Ivanow partimmo per le ricerche nostre.

L'Ivanow, proponendosi ricerche sul processo della fecondazione artificiale, dimostrò, che il metodo delle fistole uterine può essere attuato sulle cagne praticando lungo il decorso di uno dei corni uterini, senza interromperne la continuità, una piccola incisione lineare a tutto spessore, e suturando i margini ai bordi della ferita cutanea.

Questi varî tipi di fistole, opportunamente combinati o variati, mi sembra che possano insieme rispondere, dal punto di vista della tecnica sperimentale, alle più svariate esigenze dei problemi fisiologici che è possibile proporsi di risolvere per tale via, e riguardanti sia la motilità uterina, sia le modificazioni dell'utero durante la fregola e la gravidanza, la fecondazione, ecc.

(1) Ivanow, *Russ. vrač.*, S. Petersburg, 7, 1908.

È chiaro che la fistola dell'Ivanow può facilmente combinarsi col 1°, 2°, 4°, 5°, 6° e 7° tipo delle nostre fistole. Così pure ciascuna delle varietà da noi descritte si può agevolmente e utilmente associare all'asportazione dell'ovaio di un lato. Potrebbe anche presentarsi l'opportunità di combinare sempre sullo stesso animale il nostro 1° tipo col 2° o col 5° o col 6°; ovvero il 2° o 3° tipo col 5° o col 6°, ecc.

Le osservazioni potute finora eseguire sulle varie cagne operate saranno comunicate a parte; esse mi confermano pienamente la fiducia nei vantaggi del metodo.

## Biologia. — *Sulla formazione dello sclerotomo nei Murenoidi* [1]. Nota preliminare del dott. UMBERTO D'ANCONA, presentata dal Socio B. GRASSI.

In due Note precedenti [2] ho descritto una formazione speciale esistente nelle larve dei Murenoidi tra lo ialoscheletro e la muscolatura del tronco, formazione che dal prof. Grassi, che per primo la osservò, fu chiamata *zona limitante* (*strati limitanti*). Fin da allora feci presente che uno dei punti da risolversi era di « vedere quale origine aveva e se poteva essere messa in relazione colle condizioni esistenti in forme inferiori (*Amphioxus*) ».

Avevo notato che già nelle prelarve appena sgusciate si rilevava la presenza di tre strati: di quello dei tubuli e dei due endotelî. Dunque, per poter arrivare a qualche conclusione in merito all'origine degli strati limitanti, era necessario fare delle ricerche su embrioni non ancora sgusciati e sulle prelarve; perciò durante un soggiorno a Messina [3] nel settembre scorso raccolsi un rilevante numero di uova, che, allevate opportunamente, mi hanno fornito tutti gli stadî necessarî fino al completo riassorbimento del tuorlo. Mi sono valso, per le ricerche in parola, principalmente delle specie indicate da Grassi [4] colle lettere A, B, E, I, raccolte da me in numero più abbondante.

Dall'esame di numerosi preparati ho potuto convincermi che, anche nelle

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di anatomia comparata della R. Università di Roma.

[2] *Osservazioni sugli strati limitanti esterni dello ialoscheletro nelle forme larvali dei Murenoidi*. Rendiconti R. Acc. Lincei, ser. 5ª, vol. XXX, 2° sem. pp. 385 e 432 (1921).

[3] Ringrazio il prof. Sanzo, direttore dell'Istituto centrale di biologia marina del R. Comitato talassografico, per aver messo gentilmente a mia disposizione tutti mezzi necessarî alla raccolta e alla preparazione del materiale.

[4] Grassi, *Metamorfosi dei Murenoidi*. R. Comitato talassogr. ital., 1913.

prelarve in sviluppo più avanzato, degli strati limitanti sono presenti soltanto lo strato dei tubuli e i due endotelî, cioè gli strati di natura cellulare; strato gelatinoso e fibrille invece non sono ancora comparsi. Risalendo agli stadî più giovani, ho trovato che i primi tre strati derivano dallo sclerotomo.

In embrioni delle specie A, B e I già al secondo giorno di sviluppo si nota la presenza dello sclerotomo in forma di cellule proliferanti alla faccia mediale di ciascun somite, tanto al margine ventrale, quanto a quello dorsale Tale origine dello sclerotomo fu già notata dal Sunier (1), che però non si curò di osservarne l'ulteriore sorte.

Seguendo invece lo sviluppo, si vede che le cellule sclerotomiche dorsali e ventrali progrediscono tra la faccia mediale del miotomo da una parte, la corda e il tubo midollare dall'altra, venendo in tal modo a incontrarsi.

In stadî più avanzati si vedono le cellule sclerotomiche disporsi man mano in varî strati. Quelle più addossate allo strato muscolare presentano frequentemente dei vacuoli; quelle invece più mediali assumono un aspetto endoteliale. Arriviamo poi ad avere più lateralmente, vicino alla muscolatura, lo strato dei tubuli e più medialmente i due endotelii.

In tale disposizione si vede una chiara assomiglianza con quanto si riscontra nell'*Amphioxus* e che fu dapprima messo in evidenza dall'Hatschek (2) (1888), che per primo usò il termine di sclerotomo. Secondo l'Hatschek, questo si forma come una piega alla parte ventrale del foglietto muscolare, piega che si estende dorsalmente tra la muscolatura e la corda e nel cui interno si continua un diverticolo del miocele (sclerocele).

La differenza nella formazione dello sclerotomo tra l'*Amphioxus* e i Murenoidi consiste dunque nel fatto che nel primo esso si forma per estroflessione della parete del somite; invece nei secondi, nei quali il somite è una massa solida, lo sclerotomo si forma per proliferazione, e soltanto secondariamente le cellule sclerotomiche si dispongono in strati endoteliali. Secondo il Sunier però, quest'ultima condizione si verificherebbe anche nell'*Amphioxus* e le immagini raffigurate dall'Hatschek sarebbero soltanto secondarie.

Secondo Swaen e Brachet (3), nella trota da principio lo sclerotomo appare come uno strato di natura epiteliale delimitante una piccola cavità; in seguito si risolve in mesenchima.

(1) Sunier, *Les premiers stades de la différentiation interne du myotome et la formation des éléments sclérotomatiques chez les Acraniens, les Sélaciens et les Téléostéens.* Onderz. Zool. Lab. Rijksuniversiteit Groningen, 1911.

(2) Hatschek, *Ueber den Schichtenbau von Amphioxus*, Anat. Anz., III Jahrg., pag. 662, 1888.

(3) Swaen et Brachet, *Étude sur les premières phases du developpement des organes dérivés du mésoblaste chez les poissons teléostéens.* Arch. de biol., tom. XVI, pag. 173 (1899).

Nei Murenoidi, da quanto s'è visto, le condizioni sono molto più simili a quelle dell'*Amphioxus* che non a quelle della trota, e sotto questo punto di vista nelle larve dei Murenoidi si conserverebbe una condizione primitiva. In esse però si nota in più lo strato dei tubuli, che, come avevo già supposto nelle mie precedenti Note, sono equivalenti a cellule. Inoltre si ha una condizione diversa da quella dell'*Amphioxus* nel fatto che lo sclerotomo si forma anche dal margine dorsale del somite.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente PATERNÒ dà il triste annuncio della grave perdita che l'Accademia ha fatto nella persona del Socio nazionale sen. prof. GIACOMO CIAMICIAN, mancato ai vivi il 2 gennaio 1922; apparteneva il defunto all'Accademia per la *Chimica*, come Corrispondente dal 14 luglio 1888, e come Socio nazionale dal 7 novembre 1893. Del Socio Ciamician il Presidente ricorda le benemerenze e gli alti meriti scientifici, aggiungendo che sarà degnamente commemorato in una delle prossime sedute.

Altri lutti, dice il Presidente, hanno colpito l'Accademia colla morte dei seguenti Soci:

HERMANN SCHWARZ, morto il 30 novembre 1921; apparteneva il defunto all'Accademia per la *Matematica*, come Socio straniero, sino dal 7 settembre 1888.

MAX NOETHER, mancato ai vivi il 13 dicembre 1921; faceva parte il defunto dell'Accademia, per la *Matematica*, come Socio straniero, sino dal 6 agosto 1891.

MAX VERWORN, morto il 23 novembre 1921; faceva parte il defunto dell'Accademia, per le *Scienze biologiche*, come Socio straniero, sino dal 31 agosto 1910.

Il Segretario CASTELNUOVO aggiunge le seguenti parole:

Colla morte di H. SCHWARZ e di M. NOETHER l'Accademia e le matematiche hanno subìto due gravi perdite. Lo Schwarz ha scritto tra il 1865 e il 1885 una serie di importanti lavori molto eleganti ed accurati sulle superficie ad area minima, sulle rappresentazioni conformi e il problema di Dirichlet, sulle serie ipergeometriche ed altri argomenti di geometria e di analisi. Il Nöther si è occupato principalmente, fra il 1870 e il 1900, di questioni di algebra nei loro rapporti colla geometria ed ha portato, in questo argomento, risultati fondamentali. Egli può riguardarsi come il fondatore di un indirizzo in cui molti in Italia hanno lavorato; e per aver esplorato lo stesso campo, quando i metodi erano più progrediti, siamo in grado di giudicare le difficoltà che egli ha dovuto vincere, la profondità e l'acume delle sue

ricerche. Legato di amicizia col nostro Cremona, egli ha portato complementi essenziali ed applicazioni ormai classiche alla teoria delle trasformazioni cremoniane.

Del Nöther, come dello Schwarz, e di altri Soci stranieri morti negli ultimi anni, saranno tenute commemorazioni in prossime sedute.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Levi-Civita presenta in omaggio, per incarico del Corrisp. Camillo Guidi, un volume di questi intitolato: « Statica delle dighe per laghi artificiali ». I contributi originali che l'Autore aveva precedentemente arrecati all'importante questione sono quivi raccolti e inquadrati in una trattazione sistematica, col necessario corredo di indicazioni bibliografiche, di sviluppi teorici, di tabelle numeriche, di dati tecnici e norme regolamentari.

L'Accademico Segretario aggiunto Millosewich, presenta l'opera in due volumi del Socio straniero Lacroix: « Déodat Dolomieu, membre de l'Institut National (1750-1801) » dando larga notizia di quanto nei volumi è contenuto, e che del Dolomieu riportano la corrispondenza, e si occupano della sue vita avventurosa, della sua prigionia e delle sue opere.

## AFFARI DIVERSI.

In seguito a richiesta del sig. Augusto Laici, si procede all'apertura di un piego suggellato inviato da quest'ultimo nell'ottobre del 1908. Nel piego è contenuta una relazione la quale dimostra che già nel 1908 il Laici aveva immaginato un sistema per ottenere effetti musicali da serie di campane, od altri strumenti sonori a percussione, mediante applicazione della elettricità.

G. C.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
*presentate nella seduta dell' 8 gennaio 1922.*

A Catalogue of British Scientific and Technical Books. London, 1921. 8°, pp. I-XVIII, 1-376.

Anales del Congreso Nacional de la Industria Minera, tomo IV. Lima, 1921. 8°, pp. 1-411.

Baffoni Luciani F. — Le infezioni puerperali: patogenesi e cura. Roma, 1921. 8°, pp. 1-20.

Barrell J. — Relations of Subjacent Igneous Invasion to Regional Metamorphism (From the « American Journal of Science », vol. L). New Haven, 1921. 8°, 1-267.

Browning P. E. — On the Sulfite Method for the Separation and Determination of Gallium when Associated with Zinc. (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society ». vol. XLI, pp. 1491-1494). New Haven, 1919. 8°.

Browning E. P. — The Use of Gallium Ferrocyanide in Analysis (Repr. from the « American Chemical Society », vol. XLIII, pp. 111-114). New Haven, 1921. 8°.

Fishman J. B. — Some Derivatives of 3-Nitro-4-Hydroxy-Benzil Alcohol (Repr.

from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLII, pp. 2297-2302). New Haven, 1920. 8°.

FISHMAN J. B. — The Condensation of Formaldehjde with Orthonitrophenol (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLII, pp. 2287-2297). New Haven, 1920. 8°.

GUIDI C. — Statica delle dighe per laghi artificiali. Torino, 1921. 8°, pp. 1-103.

KARR W. G. — Comparative Metabolims of Proteins of Unlike Composition (Repr. from the « Journal of Biological Chemistry », vol. XLV, pp. 289-295). New Haven, 1921. 8°.

KARR W. G. — Metabolism Studies with Diets Deficient in Water-Soluble (B) Vitamine (Repr. from the « Journal of Biological Chemistry », vol. XLIV, pp. 277-282). New Haven, 1920. 8°.

KARR W. G. — Some Effects of Water-Soluble Vitamine upon Nutrition (Repr. from the « Journal of Biological Chemistry », vol. XLIV, pp. 255-258). New Haven, 1920. 8°.

LACROIX A. — Déodat Dolomieu, membre de l'Institut National (1750-1801), tome I-II. Paris, 1921. 8°, pp. LXXX, 1-255, 1-320.

LANE W. F. — The Preparation of Some Alkyl Derivatives of Resorcinol and the Relation of their Structure to Antiseptic Properties (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLIII, pp. 348-360). New Haven, 1921. 8°.

LONGWELL C. R. — Geology of the Muddy Mountains, Nevada, with a Section to the Grand Wash Cliffs in Western Arizona (Repr. from the « American Journal of Science », vol. L, pp. 39-62). New Haven, 1921. 8°.

MENDEL B. L. — The Adjustment of Blood Volume after Injection of Isotonic Solutions of varied Composition (Repr. from the « American Journal of Physiology », vol LIII, pp. 323-344). New Haven, 1920. 8°.

PORTER E. LYMAN — On the Qualitative Separation and Detection of Gallium (Repr. from the « American Journal of Science », vol XLIX, pp. 221-224). New Haven, 1917. 8°.

RAOT E. — La déclaration des droits et devoirs des Nations adoptée par l'Institut américain de Droit international. Washington, 1916. 8°, pp. 1-13.

RUTHERFORD THORPE M. — John Day Promerycochoeri, with Descriptions of five New Species and one New Subgenus (Repr. from the « American Journal of Science », vol. I, pp. 215-244). New Haven, 1921. 8°.

SIMPSON G. E. — The Effect of Diet on the Excretion of Indican and the Phenols (Repr. from the « Journal of Biological Chemistry », vol. XLIV, pp. 69-97). New Haven, 1920. 8°.

SWANN LULL R. — The Cretaceous Armared Dinosaur, Nodosaurus textilis *Marsh* (Repr. from the « American Journal of Science », vol. I, pp. 97-126). New Haven, 1921. 8°.

WENTE E. C. — The Selective Reflection of heat Waves by Linear Resonators (Repr. from the « Physical Review », vol. XVI, pp. 133-148). Ithaca, 1920. 8°.